Ενότητα 7: Πρώτοι Αριθμοί –Σύνθετοι αριθμοί-Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Δραστηριότητα 1

Στην άσκηση 15 της προηγούμενης παραγράφου συμπλήρωσες τον πίνακα με τους παράγοντες των φυσικών αριθμών (εκτός του 0) μέχρι και το 50.
Αν εξαιρέσουμε το 1, μπορείς να χωρίσεις τους φυσικούς αριθμούς σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το πλήθος και το είδος των διαιρετών τους;

Να θυμάμαι ότι:

*Ένας φυσικός αριθμός, διάφορος από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται **πρώτος** αριθμός. Αν έχει και άλλους διαιρέτες λέγεται **σύνθετος**.*

***Κάθε φυσικός** αριθμός, διάφορος από το 1, είναι δυνατό να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως **γινόμενο πρώτων** αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής).*

Δραστηριότητα 2

Σε ένα δοχείο τοποθετούνται τέσσερις κόκκινες, τέσσερις κίτρινες, τέσσερις μπλε και τέσσερις πράσινες μπάλες. Σε όλες τις μπάλες με το ίδιο χρώμα αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

Κόκκινη:	2
Κίτρινη:	3
Μπλε:	5
Πράσινη:	7

Ένας μαθητής παίρνει στην τύχη μια μπάλα από το δοχείο και καταγράφει τον αριθμό της στο τετράδιό του. Επαναλαμβάνει την πιο πάνω διαδικασία το πολύ τέσσερις φορές. Στη συνέχεια υπολογίζει το γινόμενο των αριθμών που έγραψε στο τετράδιό του. Ανακοινώνει στον καθηγητή του μόνο το γινόμενο που βρήκε και ο καθηγητής ως «δια μαγείας» βρίσκει πόσες και ποιες μπάλες πήρε ο μαθητής.
Να βρείτε ποιες μπάλες πήρε από το κουτί ο μαθητής και να αναφέρετε τον αριθμό που ήταν γραμμένος σε κάθε μπάλα, αν το γινόμενό τους είναι ίσο με:
(α) 28 (β) 210 (γ) 90

Να προσέξω ότι:

Ο φυσικός αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 19, 21, 23, 27, 29 είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι;

Απάντηση:

Ο αριθμός 1 δεν είναι πρώτος ούτε σύνθετος. Οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 18, 19, 23 και 29 είναι πρώτοι, αφού διαιρούνται μόνο από τον εαυτό τους και τη μονάδα. Ο αριθμός 4 είναι σύνθετος αφού διαιρείται και από τον 2(εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα).

Οι αριθμοί 6 (διαιρείται από το 1, το 2, το3 και το 6), τον 10 (διαιρείται από το 1, το 2, το 5 και το 10), τον 18 (διαιρείται από το 1, το 2, το 3, το 6, το 9 και το 18). τον 21 (διαιρείται από το 1, το 3, το 7 και το 21) και τον 27 (διαιρείται από το 1, το 3, το 9και το 27) είναι επίσης σύνθετοι.

2. Να αναλυθεί ο αριθμός 60 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Απάντηση:

Για να αναλύσουμε τον αριθμό 60 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει να βρούμε όλους τους πρώτους αριθμούς που τον διαιρούν. Αυτό μπορεί να γίνει με τον τρόπο που ακολουθεί.

60	2			
0	30	2		
	0	15	3	
		0	5	5
			0	1

ή

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Άρα $60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=2^2\cdot 3\cdot 5$.

Να θυμάμαι ότι:

Όταν γράφουμε έναν αριθμό ως γινόμενο των πρώτων παραγόντων του λέμε ότι τον αναλύσαμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;

1. Να βρεις τους διαιρέτες των αριθμών: 8, 12, 14, 15, 17, 20, 25, 31, 33,40. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

2. Να αναλύσεις τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:
α. 78 **β.** 348, **γ.** 1.210, **δ.** 2.344

3. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

4. Να βρεις τον πρώτο κατά σειρά πρώτο αριθμό που είναι μεγαλύτερος του 200. Να αναλύσετε την σκέψη σας.

5. Να βρεις ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι παράγοντας του αριθμού $2^3\cdot 5^2$.
α. 2 **β.** 4 **γ.** 8 **δ.** 16 **ε.** 5
στ. 25 **ζ.** 3 **η.** 7 **θ.** 10 .

6. Η Χριστίνα βρήκε ότι οι πρώτοι παράγοντες του φυσικού αριθμού α είναι οι εξής : 2,2,3, 5,5,7 . Ποιος είναι ο αριθμός α;

7. Να εξετάσεις αν ο 3 διαιρεί κάποιον από τους παρακάτω φυσικούς αριθμούς
α. $2^5\cdot 3\cdot 5^9$ **β.** $2^5\cdot 5^3$

8. Να εξετάσεις αν ο 15 είναι παράγοντας του $5^6\cdot 2^7\cdot 3$.

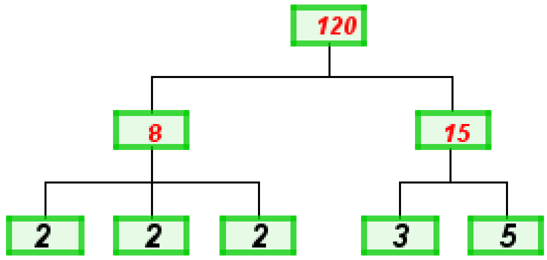
9. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $7^{123}\cdot 5^3$ με το 7.

10. Να βρεις όλους τους παράγοντες του $2^2\cdot 3\cdot 5$.

11. Στο παράδειγμα 1 είναι ένα δενδρόγραμμα όπου ο αριθμός σε κάθε κουτάκι είναι το γινόμενο των αριθμών των κουτιών με τα οποία συνδέετε ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω.

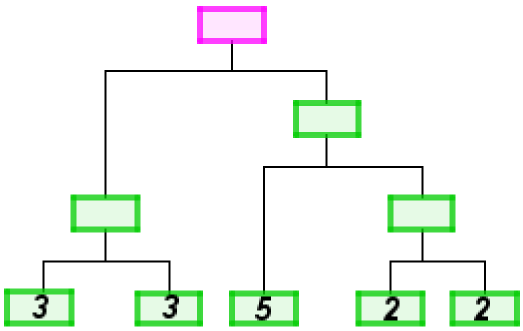
Επομένως ο αριθμός 120 να γραφτεί ως:

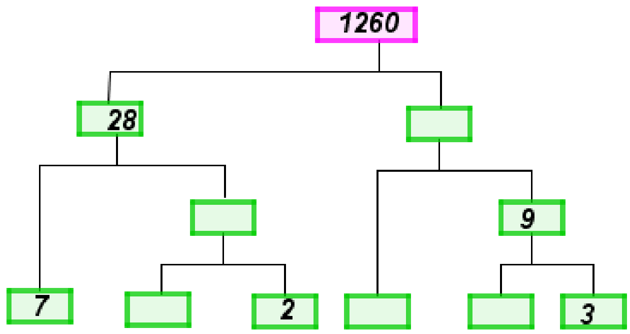
- $8\cdot 15$
- $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$
- $2^3\cdot 3\cdot 5$
- $2\cdot 2\cdot 2\cdot 15$



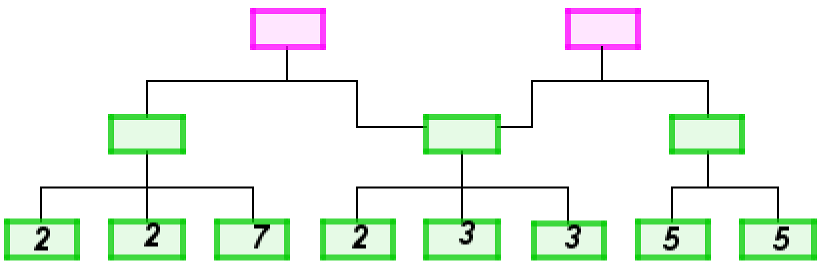
Παράδειγμα 1

α. Να συμπληρώσεις τα κουτάκια και να γράψεις τον αριθμό που βρίσκεται στο φούξια κουτί με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς όπως στο παράδειγμα 1.





β. Να συμπληρώσεις τα κουτάκια και να γράψεις τον αριθμό που βρίσκεται στα φούξια κουτάκια με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς όπως στο παράδειγμα 1.



γ. Ποιοι παράγοντες είναι κοινοί και στους δύο αριθμούς που βρίσκονται στα φούξια κουτάκια;

δ. Προσπάθησε να βρεις ποιοι αριθμοί διαιρούν και τους αριθμούς που βρίσκονται στα φούξια κουτάκια. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;

ε. Μπορείς να βρεις έναν αριθμό που να είναι πολλαπλάσιο και των δύο αριθμών που βρίσκονται στα φούξια κουτάκια.

Και λίγα από την ιστορία των μαθηματικών

Ιστορικό Σημείωμα

Ο Ερατοσθένης γεννήθηκε τον 3^{ο} αιώνα π. Χ. στην αρχαία ελληνική πόλη Κυρήνη της Βόρειας Αφρικής (στη σημερινή Λιβύη) και έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, όπου διατέλεσε και διευθυντής της φημισμένης βιβλιοθήκης της.

Ήταν φημισμένος μαθηματικός και αστρονόμος. Μεταξύ άλλων εφεύρε μια μέθοδο για την εύρεση των πρώτων αριθμών. Η μέθοδος ονομάστηκε «**το κόσκινο του Ερατοσθένη».** Ο Ερατοσθένης σκέφτηκε να ξεκινήσει από τον μικρότερο πρώτο αριθμό που είναι το 2 και να διαγράψει όλα τα πολλαπλάσια του, τα οποία προφανώς είναι σύνθετοι αριθμοί αφού διαιρούνται με το 2. Στη συνέχεια εφάρμοσε την ίδια διαδικασία για κάθε επόμενο φυσικό αριθμό μετά το 2.

12. Προσπάθησε να εφαρμόσεις τον αλγόριθμο του Ερατοσθένη στον παρακάτω πίνακα για να βρεις όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το 200 .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

α. Αρχικά να διαγράψεις τα πολλαπλάσια του 2.

β. Στη συνέχεια να διαγράψεις τα πολλαπλάσια του 3.Υπήρχαν πολλαπλάσια του 3 που ήταν ήδη διαγραμμένα; Δώσε μία ερμηνεία.

γ. Πόσα πολλαπλάσια του 4 θα χρειαστεί να διαγράψεις που δεν είναι ήδη διαγραμμένα; Δώσε μία ερμηνεία.

δ. Πόσα πολλαπλάσια του 6 θα χρειαστεί να διαγράψεις που δεν είναι ήδη διαγραμμένα; Δώσε μία ερμηνεία.

ε. Υπάρχει πολλαπλάσιο κάποιο άρτιου αριθμού που δεν έχεις ήδη διαγράψει; Δώσε μία ερμηνεία.

στ. Αν έχεις διαγράψει τα πολλαπλάσια όλων των αριθμών που προηγούνται ενός σύνθετου αριθμού(για παράδειγμα του 15) υπάρχει πολλαπλάσιό του που δεν έχεις ήδη διαγράψει; Δώσε μία ερμηνεία.

Ακολουθήστε το σύνδεσμο http://www.hbmeyer.de/eratclass.htm για μια ψηφιακή εφαρμογή για [Το κόσκινο του Ερατοσθένη](http://www.hbmeyer.de/eratclass.htm).

Και λίγα ακόμα από την ιστορία των μαθηματικών

Ιστορικό Σημείωμα

Η Θεωρία αριθμών απασχόλησε πολλούς Μαθηματικούς με, συχνά, συναρπαστικά αποτελέσματα. Μερικές από τις προτάσεις της θεωρίας αριθμών έχουν μείνει στην ιστορία για την σπουδαιότητά τους ή για τις αποδείξεις τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της τελευταίας κατηγορίας είναι το 2ο θεώρημα του Fermat. Ο Φερματ στο περιθώριο μιας σελίδας του βιβλίου «Αριθμητικά» του Διόφαντου σημείωσε ότι έχει ανακαλύψει μία απόδειξη για το ότι αν x, y, z είναι φυσικοί αριθμοί και n είναι φυσικός με $n > 2$, τότε η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει λύση, αλλά η απόδειξη είναι μεγάλη και δεν χωράει στο περιθώριο της σελίδας. Αυτή η απόδειξη δεν βρέθηκε ποτέ. Βρέθηκε μόνο η μελέτη μιας ειδικής περίπτωσης (για $n = 4$).

Στη θεωρία αριθμών συναντάμε ως και προτάσεις των οποίων την αλήθεια μπορούμε να διαπιστώσουμε για ένα μεγάλο πλήθος αριθμών (πρακτικά για περίπου όσους γνωρίζουμε), αλλά δεν έχουμε κατορθώσει να τις αποδείξουμε. Τέτοιες προτάσεις ονομάζονται εικασίες. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εικασίας είναι η λεγόμενη «Εικασία του Goldbach». Ο Goldbach (1690-1724) διατύπωσε την εικασία ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών.

Το 1845 ο μαθηματικός Bertrand διατύπωσε την εικασία ότι μεταξύ οποιουδήποτε αριθμού (μεγαλύτερου του 3) και του διπλάσιου του αριθμού αυτού, υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός.

13. Να εφαρμόσετε την εικασία του Goldbach για τους άρτιους αριθμούς 32 και 42.

14. Να εφαρμόσετε την εικασία του Bertrand για τον αριθμό 20.