ΠΡΑΞΕΙΣ

※ Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g : A \to \mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων f και g.

α. Άθροισμα $S = f + g$

β. Διαφορά $D = f - g$

γ. Γινόμενο $P = f \cdot g$

δ. Πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$

<u>Απάντηση:</u>

α. Είναι:

$$S(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

β. Είναι:

$$D(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

γ. Είναι:

$$P(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

δ. Είναι:

$$R(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0$$

※ Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g : B \to \mathbb{R}$$

Πως ορίζεται η σύνθεση της f με την g;

<u>Απάντηση:</u> Η σύνθεση της f με την g (συμβολισμός $g \circ f$) ορίζεται για κάθε $x \in A$ με $f(x) \in B$ και έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

✧ Δίνεται συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy. Τι λέγεται **γραφική παράσταση της f;**

<u>Απάντηση:</u> **Γραφική παράσταση** της f στο σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(\alpha,\beta)$, του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\beta = f(\alpha)$$

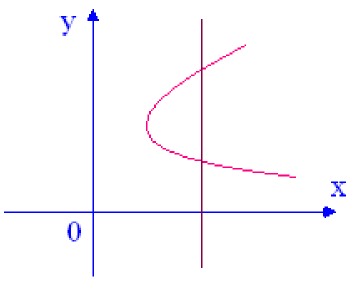
<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Η γραφική παράσταση συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με C_f.

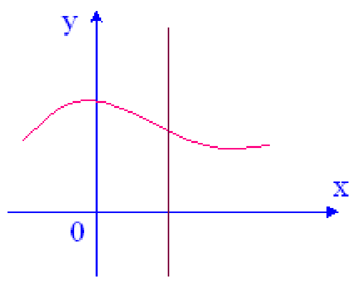
2. Αν δοθεί συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και σημείο $M(\alpha,\beta)$ και μας ζητήσουν να ελέγξουμε αν **μπορεί το σημείο M να ανήκει στη** C_f τότε:
   - ★ Ελέγχουμε αν $\alpha \in A$
   - ★ Αν ισχύει $f(\alpha) = \beta$

3. Αν δοθεί μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων, αυτή μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο αν οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία στον άξονα των τεταγμένων $y'y$ **τέμνει την γραμμή σε ένα το πολύ σημείο.**

<u>Παράδειγμα:</u>



Σχήμα 1

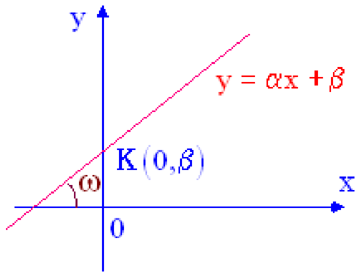


Σχήμα 2

Η γραμμή στο σχήμα 1 δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, ενώ η γραμμή στο σχήμα 2 μπορεί να είναι.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com

◈ Γραφικές παραστάσεις «Γνωστών» συναρτήσεων

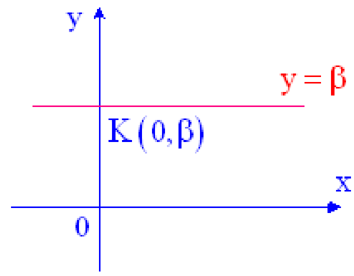


(α) Η καμπύλη της συνάρτησης:

$$f(x)=\alpha x+\beta$$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0,\beta)$ και έχει συντελεστή:

$$\alpha=\varepsilon\varphi\omega$$

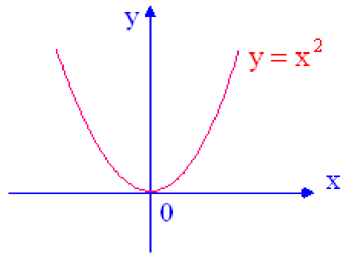


(β) Η γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης:

$$f(x)=\beta$$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0,\beta)$ και έχει συντελεστή:

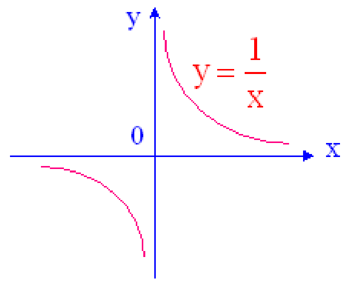
$$\alpha=0$$



(γ) Η γραφική παράσταση της:

$$f(x)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}$$

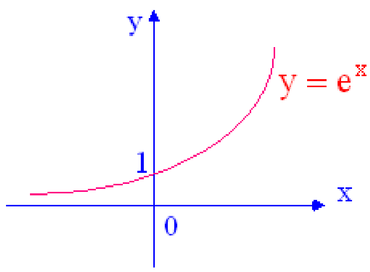
Είναι παραβολή.



(δ) Η γραφική παράσταση της:

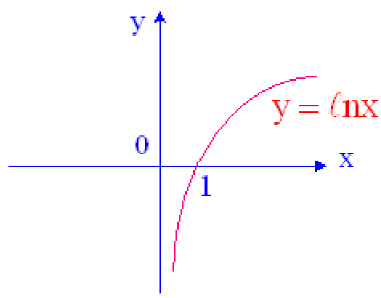
$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in\mathbb{R}^*$$

Είναι υπερβολή.



(ε) Είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής:

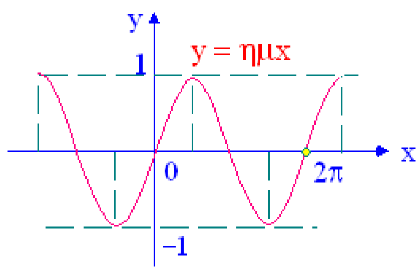
$$f(x)=e^x,\quad x\in\mathbb{R}$$



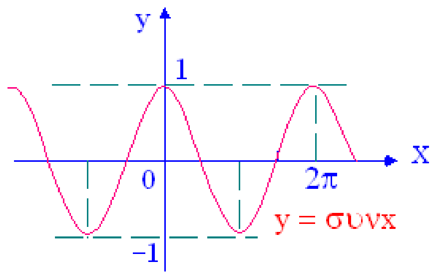
(στ) Είναι η γραφική παράσταση της λογαριθμικής:

$$f(x)=\ell nx,\quad x\in(0,+\infty)$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com



(ζ) Είναι η γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης:
$f(x) = ημx, \quad x \in \mathbb{R}$



(η) Είναι η γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης:
$f(x) = συνx, \quad x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

✷ Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα **διάστημα Δ** του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$, όταν για **οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$\text{αν} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

✷ Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα **διάστημα Δ** του πεδίου ορισμού της;
Απάντηση: Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$\text{αν} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

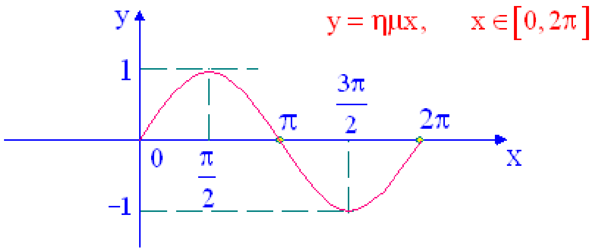
Παρατηρήσεις:

1. Μια συνάρτηση που είναι **γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα** λέγεται **γνησίως μονότονη**

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com

2. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο (ή κάποια) διάστημα (ή διαστήματα) του πεδίου ορισμού της και ταυτόχρονα να είναι γνησίως φθίνουσα σε κάποιο άλλο.

Παράδειγμα:



Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x,\quad x\in[0,2\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα:

$$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$$

ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα:

$$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$$

3. Η **μελέτη** της **μονοτονίας** μιας **συνάρτησης** γίνεται εύκολα με τη βοήθεια της **παραγώγου** όπως θα δούμε στη συνέχεια.

✷ Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_1 $(x_1\in A)$;

Ποιο είναι το τοπικό **μέγιστο;**

<u>Απάντηση:</u> Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ **παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο** $x_1\in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_1 **του** x_1 τέτοια ώστε:

$$U_1\subseteq A \quad \text{και} \quad f(x)\le f(x_1) \quad \text{για κάθε} \quad x\in U_1$$

Το **τοπικό μέγιστο** είναι το $f(x_1)$.

✷ Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο** x_2 $(x_2\in A)$**;**

Ποιο είναι το **τοπικό ελάχιστο;**

<u>Απάντηση:</u> Η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέμε ότι **παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο** $x_2\in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_2 **του** x_2 τέτοια ώστε:

$$U_2\subseteq A \quad \text{και} \quad f(x)\ge f(x_2) \quad \text{για κάθε} \quad x_2\in U_2$$

Το **τοπικό ελάχιστο** είναι το $f(x_2)$.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com

Παρατηρήσεις:

1. Η περιοχή U_1 του x_1 μπορεί να είναι ένα διάστημα της μορφής:

$$(\alpha,\beta) \text{ με } \alpha < x_1 < \beta \text{ ή } [x_1,\beta) \text{ ή } (\alpha,x_1] \text{ ή } (x_1,\beta) \text{ ή } (\alpha,x_1)$$

ή ακόμη η ένωση διαστημάτων $(\alpha,x_1)\cup(x_1,\beta)$

2. Αν για τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ υπάρχει $x_1\in A$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_1)\geq f(x) \text{ για κάθε } x\in A$$

τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο x_1.

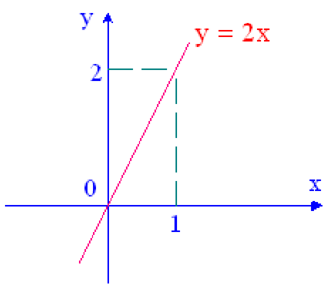
Το **ολικό μέγιστο** είναι το $f(x_1)$.

Ανάλογα ορίζεται και **ολικό ελάχιστο.**

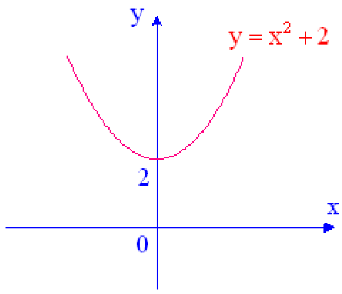
3. Τα τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και τα αντίστοιχα ολικά λέγονται απλά **ακρότατα** της συνάρτησης.

4. Μια συνάρτηση **δεν είναι απαραίτητο** να έχει **ακρότατα**. Μπορεί **να έχει μέγιστο και να μην έχει ελάχιστο** (ή το αντίθετο).

Παραδείγματα:



σχήμα 1



σχήμα 2

Από τη γραφική παράσταση της $f(x)=2x,\quad x\in\mathbb{R}$ (σχήμα 1) φαίνεται ότι η συνάρτηση f **δεν έχει ακρότατα.**

Από τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2+2,\quad x\in\mathbb{R}$ (σχήμα 2) φαίνεται ότι η συνάρτηση g **παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο** $x_o=0$ και το ελάχιστο είναι:

$$\boxed{g(0)=2}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ☎ 2109762055
e-mail : v_gimis@hotmail.com