ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2+3x+1, \quad x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=x+1, \quad x\in\mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. $S=f+g$ β. $D=f-g$

γ. $P=f\cdot g$ δ. $R=\dfrac{f}{g}$

<u>Λύση:</u>

α. Γνωρίζουμε ότι:

$$S(x)=f(x)+g(x)=x^2+3x+1+x+1$$

Άρα:

$$\boxed{S(x)=x^2+4x+2, \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

β. Είναι:

$$D(x)=f(x)-g(x)=x^2+3x+1-x-1$$

Άρα:

$$\boxed{D(x)=x^2+2x, \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

γ. Είναι:

$$P(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(x^2+3x+1\right)(x+1)$$

Άρα:

$$\boxed{P(x)=x^3+4x^2+4x+1, \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}}$$

δ. Είναι:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0$$

Άρα:

$$\boxed{R(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}, \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}-\{-1\}}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ell nx, \quad x>0 \qquad \text{και} \qquad g(x)=2x+1, \quad x\in\mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. $(f\circ g)(x)$ β. $(g\circ f)(x)$

Λύση:

α. Για να ορισθεί καλά η:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

θα πρέπει $x\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$: το πεδίο ορισμού της g) και

$$g(x)\in(0,+\infty)$$

Πρώτα βρίσκουμε για ποια x ορίζεται η $f\circ g$ και μετά τον τύπο της.

Άρα:

$$x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad 2x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{1}{2}$$

Επομένως για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ έχουμε:

$$\boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=\ell n(2x+1)}$$

β. Πρέπει:

$$x\in(0,+\infty) \quad \text{και} \quad f(x)\in\mathbb{R}$$

Όμως αν:

$$x\in(0,+\infty) \quad \text{τότε} \quad \ell nx\in\mathbb{R}$$

Άρα πρέπει τελικά:

$$x\in(0,+\infty)$$

που είναι και το πεδίο ορισμού της $(g\circ f)(x)$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\ell nx)$$

Άρα:

$$\boxed{(g\circ f)(x)=2\cdot\ell nx+1}$$

Παρατηρούμε ότι γενικά είναι:

$$f\circ g\neq g\circ f$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν έχουμε ούτε το ίδιο πεδίο ορισμού.

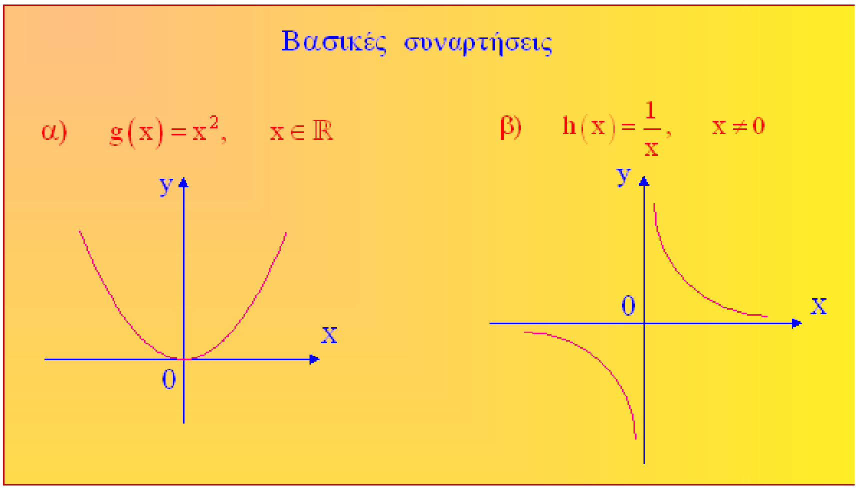
7. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

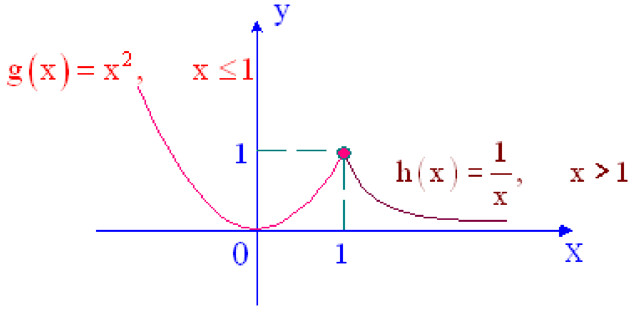
Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την παραπάνω συνάρτηση.

Λύση:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com



Σχεδιάζουμε αρχικά την $g(x)=x^2$ και αποκόπτουμε το τμήμα της για $x>1$. Έπειτα σχεδιάζουμε την $h(x)=\dfrac{1}{x}$ μόνο για $x>1$



Από τη γραφική παράσταση της δεδομένης συνάρτησης f, παρατηρούμε ότι:

- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[0,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Στο διάστημα $[1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f παρουσιάζει:

- Ελάχιστο (ολικό) στο σημείο $x_1=0$ και είναι το $f(0)=0$.
- Τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_2=1$ και είναι το $f(1)=1$.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

8. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση:

Σημεία τομής με τους άξονες

Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f τέμνει:

α. Τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$ αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

β. Τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες που είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = 0$$

Επειδή $f(0) = 0$ η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\boxed{(0,0)}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(x-3)(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0 \quad ή \quad x = 3 \quad ή \quad x = -2}$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι:

$$\boxed{(0,0), \quad (3,0), \quad (-2,0)}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-4}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

α. Πρέπει να είναι:

$$x^2-4\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(x+2)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{x\neq 2,\quad x\neq -2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f, είναι:

$$\boxed{A=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)}$$

β.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$f(x)>0$$

και κάτω από τον $x'x$, όταν:

$$f(x)<0$$

Επειδή αναζητούμε τις τιμές του x για τα οποία τα σημεία της C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, πρέπει να είναι:

$$f(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-5}{x^2-4}<0$$

Την παραπάνω ανισότητα, λύνουμε με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	//	$+$	//	$-$	0	$+$	

Άρα η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$\boxed{x<-2 \quad \text{ή} \quad 2<x<5}$$

10. Σε μια μελέτη για το περιβάλλον διαπιστώθηκε ότι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα (CO) στον αέρα μιας πόλης δίνεται από τη σχέση:

$$C(x)=0,5\cdot x+1$$

όπου x ο πληθυσμός της πόλης σε χιλιάδες κατοίκους και $C(x)$ εκφράζεται σε ppm (μέρη στο εκατομμύριο).

Εκτιμάται ότι σε t χρόνια από τώρα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

$$x(t)=10+0,1\cdot t^2 \quad \text{χιλιάδες}$$

α. Να εκφράσετε την συγκέντρωση του CO συναρτήσει του χρόνου.

β. Πότε η συγκέντρωση αναμένεται να φτάσει τα $6,8\ \text{ppm}$;

<u>Λύση:</u>

α. Αφού:

$$C(x)=0,5\cdot x+1$$

τότε είναι:

$$C(x(t))=0,5\cdot x(t)+1=0,5(10+0,1\cdot t^2)+1$$

Άρα:

$$\boxed{C(t)=0,05\cdot t^2+6 \quad \text{ppm}}$$

β. Θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση:

$$C(t)=6,8$$

Άρα:

$$6+0,05\cdot t^2=6,8 \quad \Leftrightarrow \quad 0,05\cdot t^2=0,8 \quad \Leftrightarrow \quad t^2=16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t=4}$$

Άρα σε 4 χρόνια η συγκέντρωση του CO πάνω από την πόλη θα είναι $6,8\ \text{ppm}$.

11. Υποθέτουμε ότι το συνολικό κόστος παρασκευής α μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$C(\alpha)=\alpha^3-30\alpha^2+500\alpha+200 \qquad (C(\alpha) \quad \text{σε} \quad \text{Euro})$$

α. Να υπολογίσετε το κόστος παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος.

β. Να υπολογίσετε το κόστος παραγωγής της $10^{\text{ης}}$ μονάδας του προϊόντος.

<u>Λύση:</u>

Στα πραγματικά προβλήματα, το πεδίο ορισμού προκύπτει και από τα δεδομένα του προβλήματος.

Εδώ πρέπει να είναι $\alpha>0$ αφού **δεν έχει νόημα** να παραχθούν **αρνητικές** μονάδες προϊόντος.

α. Το κόστος παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος δίνεται από την τιμή της συνάρτησης κόστους για $\alpha=10$. Άρα:

$$C(10)=10^3-30\cdot 10^2+500\cdot 10+200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(10)=3200 \quad \text{Euro}}$$

β. Το κόστος παραγωγής της $10^{\text{ης}}$ μονάδας είναι η διαφορά μεταξύ του κόστους παραγωγής 10 μονάδων προϊόντος και 9 μονάδων προϊόντος.

Άρα:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

$$Q = \text{Κόστος παραγωγής της 10ης μονάδας} = C(10) - C(9) \quad \Rightarrow$$

$$Q = 3200 - 2999 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 201 \quad \text{Euro}}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com