ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

◈ **Σκοπός:**

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του ορίου και της συνέχειας μιας συνάρτησης.

◈ **Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα θα πρέπει να μπορείτε:

- Να εφαρμόζετε τις ιδιότητες των ορίων και να βρίσκετε τα όρια που σας ζητούνται.
- Να μετασχηματίζετε παραστάσεις που οδηγούν σε όρια της μορφής:
  $$\frac{0}{0}$$
- Να βρίσκετε το όριο μιας πολυκλαδικής συνάρτησης στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.
- Να διατυπώνετε τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο και σε διάστημα.
- Να εξετάζετε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο ή σ' ένα διάστημα.
- Να βρίσκετε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση που ορίζεται με τη βοήθεια αυτών να είναι συνεχής σ' ένα σημείο ή ένα διάστημα.

✦ **Ορισμός του ορίου**

Να περιγράψετε τι σημαίνει η έκφραση:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = k$$

<u>Απάντηση:</u> Η παραπάνω έκφραση, διαβάζεται:

« **το όριο της συνάρτησης** f **είναι το** k **όταν το** x **τείνει στο** x_o »

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Ενώ σημαίνει ότι καθώς το x **παίρνει τιμές ολοένα και πιο κοντά στο** x_o **οι τιμές τις** $f(x)$ **πλησιάζουν όλο και περισσότερο στην τιμή** k.

Παρατηρήσεις:

1. Η έκφραση $\lim_{x \to x_o} f(x) = k$ έχει **νόημα** όταν η συνάρτηση ορίζεται σε **περιοχή του** x_o (δηλαδή σε διάστημα $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β)), **χωρίς να είναι απαραίτητο το** x_o **να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.**

2. **Ιδιότητες ορίων**

Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \to x_o} g(x) = \ell_2$ με $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α. $\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x) + \lim_{x \to x_o} g(x) = \ell_1 + \ell_2$

β. $\lim_{x \to x_o} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x) - \lim_{x \to x_o} g(x) = \ell_1 - \ell_2$

γ. $\lim_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_o} f(x) \cdot \lim_{x \to x_o} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

δ. Αν $\ell_2 \neq 0$, τότε $\lim_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_o} f(x)}{\lim_{x \to x_o} g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

ε. $\lim_{x \to x_o} f^{\nu}(x) = \left[\lim_{x \to x_o} f(x)\right]^{\nu} = \ell_1^{\nu}$ αν $\nu \in \mathbb{N}$

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και όταν ο αριθμός ν είναι αρνητικός ακέραιος και $\ell_1 \neq 0$.

στ. Αν $f(x) \geq 0$ σε περιοχή του x_o, τότε:

$$\lim_{x \to x_o} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim_{x \to x_o} f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$$

3. Αν η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τρόπο για $x < x_o$ και για $x > x_o$, δηλαδή είναι της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{για} \quad x < x_o \\ h(x) & \text{αν} \quad x > x_o \end{cases}$$

τότε:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

α. Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ για $x<x_o$

(συμβολίζεται με $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$)

Έστω ότι:

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_1$$

β. Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ για $x>x_o$

(συμβολίζεται με $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$)

Έστω ότι:

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\lim_{x\to x_o} h(x)=\ell_2$$

γ. Αν $\ell_1=\ell_2=\ell$ τότε λέμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell$$

<u>Παραδείγματα</u>

1. Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases}$ τότε:

★ Για $x<1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1^2=1$$

★ Για $x>1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} x^3=1^3=1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

Επομένως:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=1}$$

2. Αν $f(x)=\begin{cases} 3x, & x<4 \\ x^2, & x\ge 4 \end{cases}$ τότε:

★ Για $x<4$, είναι:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4} 3x=3\cdot 4=12$$

★ Για $x\ge 4$, είναι:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4} x^2=4^2=16$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)\ne\lim_{x\to 4^+} f(x)$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

✦ Συνέχεια

Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται συνεχής στο $x_o \in A$;

<u>Απάντηση:</u> Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται συνεχής στο $x_o \in A$ αν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in A$, τότε λέγεται συνεχής στο Α.

2. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα τότε η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής γραμμή.

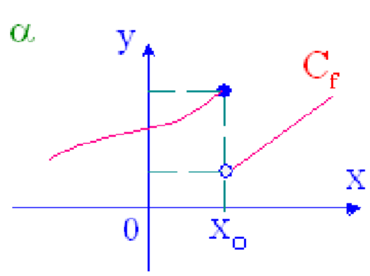
3. Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις και οι πράξεις οι πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς.

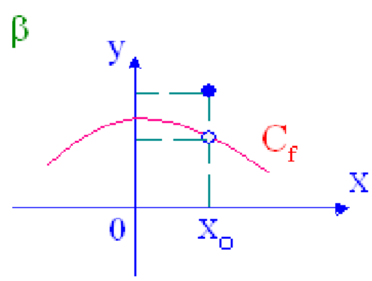
<u>Παραδείγματα:</u> Για $x_o \in \mathbb{R}$, έχουμε:

α. $\lim\limits_{x\to x_o} ημx = ημx_o$ β. $\lim\limits_{x\to x_o} συνx = συνx_o$

γ. $\lim\limits_{x\to x_o} e^x = e^{x_o}$ δ. $\lim\limits_{x\to x_o} \ell nx = \ell nx_o$, αν $x_o > 0$

4. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής στο $x_o \in A$ στις παρακάτω περιπτώσεις:





Το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι:

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_o^-} f(x)$$

Το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει, όμως είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) \neq f(x_o)$$

5. Η συνέχεια μιας συνάρτησης εξετάζεται **μόνο σε σημεία** x_o **που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.**

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com