ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^3-4x+8\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-8}{x-2}$

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+6}$

<u>Λύση:</u>

Απλές περιπτώσεις

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων. Ουσιαστικά κάνουμε αντικατάσταση.

α. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^3-4x+8\right)=3(-1)^3-4(-1)+8=-3+4+8=9$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-8}{x-2}=\dfrac{3\cdot 0^2-8}{0-2}=4$

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+6}=\sqrt{3+6}=3$

2. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)=-3$ και $\lim\limits_{x\to \alpha}g(x)=4$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(3\cdot f(x)-4\cdot g(x)\right)$ β. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{2\cdot f(x)+g(x)}{\sqrt{g(x)}}$

<u>Λύση:</u>

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.

α. $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(3\cdot f(x)-4\cdot g(x)\right)=3\cdot\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)-4\cdot\lim\limits_{x\to \alpha}g(x)=$

$$3(-3)-4\cdot 4=-9-16=-25$$

β.

Επειδή $\lim\limits_{x\to \alpha}g(x)=4>0$ η συνάρτηση $g(x)$ παίρνει θετικές τιμές σε περιοχή του α και έτσι η $\sqrt{g(x)}$ ορίζεται καλά.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{2\cdot f(x)+g(x)}{\sqrt{g(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to\alpha}\left(2\cdot f(x)+g(x)\right)}{\lim\limits_{x\to\alpha}\sqrt{g(x)}}=\frac{2\cdot\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)+\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)}}=$$

$$=\frac{2(-3)+4}{\sqrt{4}}=\frac{-6+4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ β. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+x-30}{x-3}$

<u>Λύση:</u>

Στις περιπτώσεις ρητών συναρτήσεων της μορφής:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

όπου $g(x),\ h(x)$ **πολυώνυμα του** x **και το** $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ **καταλήγει στη μορφή** $\frac{0}{0}$**, τότε σίγουρα το** α **είναι ρίζα των πολυωνύμων και αυτά γράφονται με τη μορφή:**

$$g(x)=(x-\alpha)g_1(x) \quad \textbf{και} \quad h(x)=(x-\alpha)h_1(x)$$

με συνέπεια το κλάσμα να απλοποιείται.

α. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+5)=6$

γ. Το πολυώνυμο $g(x)=x^3+x-12$ έχει ρίζα το 3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	−30	3
	3	9	30	
1	3	10	0	

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

παραγοντοποιούμε:

$$g(x)=(x-3)(x^2+3x+10)$$

Επομένως το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+x-30}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+10)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+10)=28$$

4. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{10x+5}$ β. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16}$

γ. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{5x+15}$

<u>Λύση:</u>

Ταυτότητες που «παραγοντοποιούν»

- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

όπου ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

α. Οι ρίζες της εξίσωσης:

$$2x^2-x-1=0$$

είναι:

$$\Delta=9,\qquad \rho_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2\cdot 2}=\begin{cases}\rho_1=1\\ \rho_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{10x+5}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{10\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2(x-1)}{10}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{10}=\frac{-3}{10}=-0,3$$

β. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{(x^2)^2-4^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{(x^2-4)(x^2+4)}=$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x^2+4)}=\frac{4+4+4}{4(4+4)}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 8}=\frac{3}{8}$$

γ. $$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{5x+15}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{5(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-3x+9}{5}=\frac{27}{5}$$

5. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ β. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

γ. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x+4+\sqrt{10+x}}{x^2-36}$

<u>Λύση:</u>

Συζυγείς παραστάσεις

☆ $\sqrt{A}+B\to\sqrt{A}-B$ ☆ $\sqrt{A}-B\to\sqrt{A}+B$

☆ $\sqrt{A}-\sqrt{B}\to\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ☆ $\sqrt{A}+\sqrt{B}\to\sqrt{A}-\sqrt{B}$

Αν η ύπαρξη μιας ρίζας αποτελεί εμπόδιο για την παραγοντοποίηση του κλάσματος, πολλαπλασιάζουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση.

α. $$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}^2-3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

β. $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}^2-3^2}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

γ. $$\lim_{x\to -6}\frac{x+4+\sqrt{x+10}}{x^2-36}=\lim_{x\to -6}\frac{\left(x+4+\sqrt{x+10}\right)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}{\left(x^2-36\right)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{(x+4)^2-\sqrt{x+10}^2}{\left(x^2-36\right)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=\lim_{x\to -6}\frac{x^2+8x+16-(x+10)}{\left(x^2-36\right)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{x^2+7x+6}{\left(x^2-36\right)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=\lim_{x\to -6}\frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x+6)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{x+1}{(x-6)\left(x+4-\sqrt{x+10}\right)}=\frac{-6+1}{(-6-6)\left(-6+4-\sqrt{-6+10}\right)}=\frac{-5}{48}$$

6. Να βρείτε τα όρια:

α. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{3+x}}$$ β. $$\lim_{x\to 24}\frac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-8}-x+20}$$

<u>Λύση:</u>

Στην άσκηση αυτή, εμφανίζονται ριζικά και στους δυο όρους του κλάσματος. Θα πολλαπλασιάσουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με τις συζυγείς παραστάσεις του αριθμητή και του παρονομαστή.

α. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{3+x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2+\sqrt{3+x}\right)}{\left(2-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2+\sqrt{3+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{3+x}\right)}{\left[4-(3+x)\right]\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{3+x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(2+\sqrt{3+x}\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

β. $$\lim_{x\to 24}\frac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x-8}-x+20}=$$

$$= \lim_{x\to 24} \frac{\left(\sqrt{x+1}-5\right)\left(\sqrt{x+1}+5\right)\left[\sqrt{x-8}+(x-20)\right]}{\left[\sqrt{x-8}-(x-20)\right]\left(\sqrt{x+1}+5\right)\left[\sqrt{x-8}+(x-20)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 24} \frac{\left[\sqrt{x+1}^2-5^2\right]\left[\sqrt{x-8}+x-20\right]}{\left[\sqrt{x-8}^2-(x-20)^2\right]\left(\sqrt{x+1}+5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 24} \frac{(x\_1-25)\left[\sqrt{x-8}+x-20\right]}{\left[x-8-\left(x^2-40x+400\right)\right]\left(\sqrt{x+1}+5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 24} \frac{(x-24)\left[\sqrt{x-8}+x-20\right]}{\left(-x^2+41x-408\right)\left(\sqrt{x+1}+5\right)} = \ell$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο:

$$-x^2+41x-408$$

έχει ρίζα το 24, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε με Horner.

−1	41	−408	24
	−24	408	
−1	17	0	

Άρα το όριο γράφεται:

$$\ell = \lim_{x\to 24} \frac{(x-24)\left(\sqrt{x-8}+x-20\right)}{(x-24)(-x+17)\left(\sqrt{x+1}+5\right)} = \lim_{x\to 24} \frac{\sqrt{x-8}+x-20}{(-x+17)\left(\sqrt{x+1}+5\right)} = \frac{4+4}{-7\cdot 10} = -\frac{4}{35}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x<2 \\ 2x+1, & x\ge 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$.

<u>Λύση:</u>

Η έκφραση $x\to 2^-$ **σημαίνει ότι:** $x\to 2$ **και** $x<2$
ενώ η έκφραση $x\to 2^+$ **σημάνει ότι:** $x\to 2$ **και** $x>2$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(1-x^2)=1-4=-3$$

και

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(2x+1)=4+1=5$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)\neq\lim_{x\to2^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to2} f(x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le3 \\ 4x-2, & x>3 \end{cases}$$

Να βρείτε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to3^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to3^+} f(x)$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to3} f(x)$.

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}(x^2+1)=3^2+1=10$$

και

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}(4x-2)=4\cdot3-2=10$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^-} f(x)=10$$

Υπάρχει το $\lim_{x\to3} f(x)$ και είναι:

$$\lim_{x\to3} f(x)=10$$

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x+\frac{|x-5|}{x-5}, \qquad x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad x\neq5$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to5} f(x)$

<u>Λύση:</u>

Για να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή, π.χ. $|A(x)|$, από μια έκφραση πρέπει να γνωρίζουμε τι τιμές (θετικές ή αρνητικές) παίρνει η εντός του απολύτου ποσότητα, στην προκειμένη

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

περίπτωση η $A(x)$.

Αν $A(x)>0$ **τότε** $|A(x)|=A(x)$.

Αν $A(x)<0$ **τότε** $|A(x)|=-A(x)$

⁂ Αν $x<5$ τότε $x-5<0$, άρα:

$$|x-5|=-(x-5)=-x+5$$

⁂ Αν $x>5$ τότε $x-5>0$, άρα:

$$|x-5|=x-5$$

Έτσι η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{-(x-5)}{x-5}=x-1, & \text{αν} \quad x<5 \\ x+\dfrac{x-5}{x-5}=x+1, & \text{αν} \quad x>5 \end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}(x-1)=5-1=4$$

ενώ:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(x+1)=5+1=6$$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-9}$$

Να βρείτε:

α. Το πεδίο ορισμού της f

β. Το όριο $\lim\limits_{x\to -3}\left[(x+3)\cdot f(x)\right]$

γ. Την τιμή που πρέπει να πάρει ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε:

$$\lim_{x\to -3}\left[(x+3)\cdot f(x)\right]=\lambda^3-\frac{23}{8}$$

<u>Λύση:</u>

α. Πρέπει $x^2-9\neq 0$, άρα:

$$x^2\neq 9 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 3,\ x\neq -3$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$\boxed{A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

β. Είναι:

$$\ell=\lim_{x\to-3}\left[(x+3)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to-3}\left[(x+3)\cdot\frac{2x+3}{x^2-9}\right]=\lim_{x\to-3}\left[(x+3)\cdot\frac{2x+3}{(x-3)(x+3)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-3}\left(\frac{2x+3}{x-3}\right)=\frac{-6+3}{-3-3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\ell=\frac{1}{2}}$$

γ. Θέλουμε να είναι:

$$\lim_{x\to-3}\left[(x+3)\cdot f(x)\right]=\lambda^3-\frac{23}{8}$$

Άρα:

$$\frac{1}{2}=\lambda^3-\frac{23}{8}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda^3=\frac{1}{2}+\frac{23}{8}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda^3=\frac{27}{8}\quad\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda=\frac{3}{2}}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2\eta\mu x+35, & x\le\frac{\pi}{6}\\ \lambda^2+x-\frac{\pi}{6}, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x)$.

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(2\eta\mu x+35)=2\eta\mu\frac{\pi}{6}+35=2\cdot\frac{1}{2}+35=36$$

και

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\left(\lambda^2+x-\frac{\pi}{6}\right)=\lambda^2+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\lambda^2$$

Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x)$, πρέπει:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}f(x)$$

άρα:

$$\lambda^2=36\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{\lambda=6\quad\text{ή}\quad\lambda=-6}$$

12. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_o τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x)=\begin{cases} e^x+2, & x\le 0 \\ \ell n(x+1)+2x, & x>0 \end{cases}$ $\quad x_o=0$

β. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x\ne -2 \\ -4, & x=-2 \end{cases}$ $\quad x_o=-2$

Λύση:

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, αρχικά βρίσκουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$.

Αν το όριο δεν υπάρχει, η f δεν είναι συνεχής στο x_o.

Αν το όριο υπάρχει, θα πρέπει στη συνέχεια να είναι:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$$

α. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+2\right)=e^0+2=3$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\ell n(x+1)+2x\right]=\ell n(0+1)+2\cdot 0=\ell n1=0$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to -2} g(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

Άρα ισχύει:

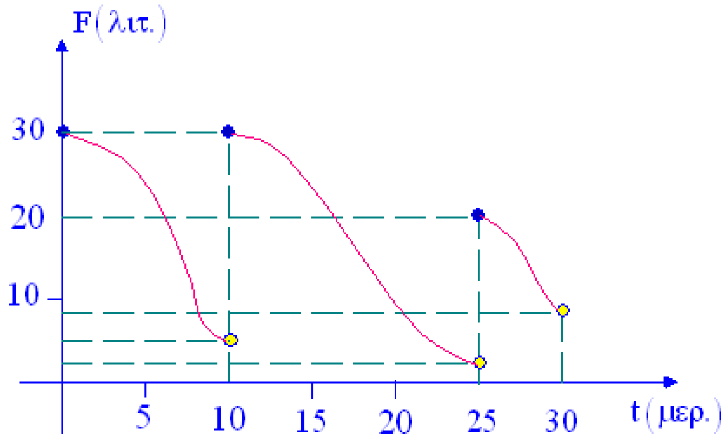
$$\lim_{x\to -2} g(x)=g(-2)$$

Επομένως η g είναι συνεχής στο $x_o=-2$.

13. Στο παρακάτω διάγραμμα δείχνει την ποσότητα F της βενζίνης (σε λίτρα) σε σχέση με το χρόνο t (σε μέρες), στο ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου, κατά τη διάρκεια

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

ενός μήνα. Σε ποιες χρονικές στιγμές η συνάρτηση F είναι ασυνεχής. Τι μπορεί να συνέβει τότε;



Λύση:

Από το διάγραμμα $F-t$ φαίνεται ότι:

$$\lim_{t\to 10^-} F(t)=5 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to 10^+} F(t)=30$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=10$ η συνάρτηση F είναι ασυνεχής, αφού:

$$\lim_{t\to 10^-} F(t)\neq \lim_{t\to 10^+} F(t)$$

Το ίδιο συμβαίνει και τη χρονική στιγμή $t=25$, διότι:

$$\lim_{t\to 25^-} F(t)=2, \quad \text{ενώ} \quad \lim_{t\to 25^+} F(t)=20$$

Προφανώς εκείνες τις χρονικές στιγμές ο χρήστης του αυτοκινήτου συμπλήρωνε βενζίνη στο ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου.

14. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις που ακολουθούν:

α. $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0$ β. $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}, \quad x\neq -1$

γ. $h(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2-x, & x\geq 1 \end{cases}$

Λύση:

α. Για κάθε $x_o\in\mathbb{R}$ με $x_o\neq 0$ ισχύει:

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_o} = f(x_o)$$

Άρα η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$.

β. Για κάθε $x_o \neq -1$ έχουμε $x_o + 1 \neq 0$ και τότε:

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = \lim_{x\to x_o} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to x_o} \frac{x_o^{\ 2}-1}{x_o+1} = g(x_o)$$

Άρα η g είναι συνεχής για κάθε $x \neq -1$.

γ.

Όταν η συνάρτηση είναι δίκλαδη (ή γενικότερα πολύκλαδη) ή μπορεί να μετασχηματιστεί σε δίκλαδη (ή σε πολύκλαδη), πιθανά σημεία ασυνέχειας είναι εκείνα στα οποία αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

⁂ Για $x < 1$, η συνάρτηση είναι:

$$h(x) = x + 1$$

Άρα είναι συνεχής.

⁂ Για $x > 1$, είναι:

$$h(x) = 2 - x$$

Άρα και σ' αυτή την περίπτωση είναι συνεχής.

⁂ Ειδικότερα στο σημείο $x_o = 1$, παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 2 - 1 = 1$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) \neq \lim_{x\to 1^+} h(x)$$

Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$, επομένως δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 1$.

15. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(x^2 + 9), \qquad x \in \mathbb{R}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

είναι συνεχής.

<u>Λύση:</u>

Υπενθύμιση

Αν δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και οι πράξεις που ορίζονται μεταξύ αυτών θα είναι συνεχείς.

Η συνάρτηση $g(x)=x^2+9, \quad x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Επίσης και η συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x, \quad x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Επειδή:

$$f(x)=(h\circ g)(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

η f θα είναι επίσης συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

16. Για ποια τιμή του σταθερού πραγματικού αριθμού α η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+5, & x<1\\ x^2-3x+4, & x\geq 1\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Για $x<1$ η $f(x)=\alpha x+5$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για $x>1$ και η $f(x)=x^2-3x+4$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Ειδικότερα στο $x_o=1$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

Όμως ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\alpha x+5)=\alpha+5$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3x+4)=1-3+4=2$$

Επίσης είναι:

$$f(1)=1^2-3\cdot 1+4=2$$

Άρα πρέπει:

$$\alpha+5=2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\alpha=-3}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}, & x<0 \\ -3+\beta, & x=0 \\ e^x-\alpha, & x>0 \end{cases}$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, σταθεροί αριθμοί.

I. Να βρείτε:

α. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

γ. Την τιμή του α ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

II. Αν $\alpha=4$, να υπολογίσετε τον αριθμό β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=0$.

(Πανελλήνιες 2007, Ημερήσια Τ.Ε.Ε.)

<u>Λύση:</u>

I. α. $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(x^2-4x+3\right)}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

β. $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x-\alpha\right)=e^0-\alpha=1-\alpha$$

γ. Για να υπάρχει το όριο, θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

άρα:

$$-3=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha=4}$$

II. Για να είναι συνεχής στο $x=0$, θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

Όμως για $\alpha=4$, είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=-3$$

Άρα πρέπει:

$$-3+\beta=-3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta=0}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com