ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ
ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

◈ **Σκοπός**

Σκοπός της ενότητας είναι ο ορισμός της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής καθώς και οι μέθοδοι εύρεσης παραγώγων.

◈ **Προσδοκώμενα αποτελέσματα**

Όταν έχετε ολοκληρώσει αυτήν την ενότητα θα πρέπει να μπορείτε:

⁂ Να δίνετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.

⁂ Να βρίσκετε με τη βοήθεια του ορισμού την παράγωγο μερικών βασικών συναρτήσεων.

⁂ Να αποδεικνύετε τους βασικούς κανόνες παραγώγισης.

⁂ Να βρίσκετε την παράγωγο δοσμένης συνάρτησης χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων.

⁂ Να βρίσκετε το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y για κάποια δεδομένη τιμή του μεγέθους x όταν δίνεται η σχέση:

$$y = f(x)$$

που συνδέει τα δυο μεγέθη.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

◈ ΟΡΙΣΜΟΙ

✦ Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη στο** x_o **του πεδίου ορισμού** της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_o του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

και είναι **πραγματικός αριθμός.** Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_o)$ και το ονομάζουμε **παράγωγο της** f **στο** x_o**.**

Παρατηρήσεις:

1. Το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

αν υπάρχει, είναι ίσο με το όριο:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Αν τα παραπάνω όρια είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε και τα δυο είναι ίσα με $f'(x_o)$.

2. Το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

μπορεί να υπάρχει **αλλά να μην είναι πραγματικός αριθμός.** Σ' αυτή την περίπτωση η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο** x_o**.**

3. Αν μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε κάποιο x_o, του πεδίου ορισμού της, τότε σίγουρα **δεν είναι παραγωγίσιμη στο** x_o**.**

4. Μια συνάρτηση **μπορεί να είναι συνεχής** σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της αλλά **όχι παραγωγίσιμη στο** x_o

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=|x|, \quad x\in\mathbb{R}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

Τότε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Άρα η f είναι **συνεχής στο 0.**

Θεωρούμε το λόγο:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

✳ Για $h > 0$, είναι:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Άρα:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1}$$

✳ Για $h < 0$, είναι:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

Άρα:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1}$$

Επομένως δεν υπάρχει το:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Άρα η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

5. Αν μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της είναι **σίγουρα συνεχής στο** x_o**.**

✦ Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_o;

<u>Απάντηση:</u>

Αν δυο μεγέθη x, y συνδέονται με τον τύπο $y = f(x)$, όπου f μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η παράγωγος $f'(x_o)$ εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής του** y **ως προς** x **για τη συγκεκριμένη τιμή** $x = x_o$**.**

<u>Παρατηρήσεις:</u>

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

1. Αν $S(t_o)$ είναι το διάστημα που έχει διανύσει ένα κινητό σε χρόνο t_o και $S(t_o+\Delta t)$ το διάστημα που έχει διανύσει σε χρόνο $t_o+\Delta t$ τότε ο λόγος:

$$\bar{\upsilon}=\frac{S(t_o+\Delta t)-S(t_o)}{\Delta t}$$

λέγεται μέση ταχύτητα του κινητού στο διάστημα $[t_0,t_o+\Delta t]$.

Όταν το Δt είναι πάρα πολύ μικρό $(\Delta t\to 0)$ τότε το όριο:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_o+\Delta t)-S(t_o)}{\Delta t}$$

λέγεται στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $\upsilon(t_o)$. Δηλαδή είναι:

$$\upsilon(t_o)=S'(t_o)$$

Η ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_o λέγεται **ρυθμός μεταβολής του διαστήματος** την ίδια χρονική στιγμή.

2. Ανάλογα ορίζεται η μέση επιτάχυνση:

$$\bar{\alpha}=\frac{\upsilon(t_o+\Delta t)-\upsilon(t)}{\Delta t}$$

όπου $\upsilon(t_o)$ και $\upsilon(t_o+\Delta t)$ η ταχύτητα του κινητού τις χρονικές στιγμές t_o και $t_o+\Delta t$ αντίστοιχα.

Όπως και η στιγμιαία επιτάχυνση:

$$\alpha(t_o)=\upsilon'(t_o)$$

Δηλαδή η στιγμιαία επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_o είναι ο **ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** την ίδια χρονική στιγμή.

3. Μερικά (ακόμη) παραδείγματα

※ Αν $q(t)$ είναι η συνάρτηση που δίνει το φορτίο που περνά από μια διατομή ενός αγωγού συναρτήσει του χρόνου η **ένταση του ρεύματος** $I(t_o)$ τη χρονική στιγμή t_o είναι ο **ρυθμός μεταβολής του φορτίου** εκείνη τη χρονική στιγμή. Άρα:

$$I(t_o)=q'(t_o)$$

※ Ο **ρυθμός μεταβολής του έργου** $W(t)$ μιας δύναμης μας δίνει την **ισχύ** $P(t)$ της δύναμης. Δηλαδή:

$$P(t_o)=W'(t_o)$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com

※ Στην οικονομία, το κόστος k και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγομένου προϊόντος. Τα πηλίκα:

$$\frac{k(x_o+h)-k(x_o)}{h}, \quad \frac{P(x_o+h)-P(x_o)}{h}$$

εκφράζουν το μέσο κόστος και το μέσο κέρδος αντίστοιχα, ενώ αν οι συναρτήσεις $k(x)$ και $P(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο x_o τα $k'(x_o)$ και $P'(x_o)$ εκφράζουν το οριακό κόστος και οριακό κέρδος ....

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ