ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x}, \qquad x\geq 0$$

Να βρείτε με τη χρήση του ορισμού, τις παραγώγους:

α. $f'(4)$ β. $f'(x_o)$ με $x_o>0$

<u>Λύση:</u>

Με τη χρήση του ορισμού βρίσκουμε το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

ή το όριο:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

α. Παρατηρούμε ότι:

$$f(4)=\sqrt{4}=2$$

Για $h\neq 0$, είναι:

$$\ell=\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=$$

$$=\frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Άρα:

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{2+2} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(4)=\frac{1}{4}}$$

β. Για $h\neq 0$ και $x_o>0$, έχουμε:

$$\ell=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\frac{\sqrt{x_o+h}-\sqrt{x_o}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x_o+h}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x_o+h}^2-\sqrt{x_o}^2}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{x_o+h-x_o}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}}$$

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com
ΕΞ' ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΡΙΞΗ

Άρα:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_o+h}+\sqrt{x_o}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x_o)=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}}$$

Αφού δείξαμε ότι για κάποιο $x_o>0$, είναι:

$$f'(x_o)=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

θα ισχύει για κάθε $x>0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

που είναι η παράγωγος της f.

ΓΚΙΜΙΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
e-mail : v_gimis@hotmail.com