

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3ο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Όριο συνάρτησης - Παραδείγματα

Βασίλης Γκιμίσης

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 8)$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 6}$

Λύση:

α. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 8) = 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = -3 + 4 + 8 = 9$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} = \frac{3 \cdot 0^3 - 8}{0 - 2} = 4$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -3$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 4$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow \alpha} (3 \cdot f(x) - 4 \cdot g(x))$ β. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cdot f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}}$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.

α. $\lim_{x \rightarrow \alpha} (3 \cdot f(x) - 4 \cdot g(x)) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) - 4 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$

$$3(-3) - 4 \cdot 4 = -9 - 16 = -25$$

β. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cdot f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} (2 \cdot f(x) + g(x))}{\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{g(x)}} = \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)}} =$

$$= \frac{2(-3) + 4}{\sqrt{4}} = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+x-30}{x-3}$

Λύση

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{x+5}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+5 = 6$

- γ. Το πολυώνυμο $g(x) = x^3 + x - 12$ έχει ρίζα το 3. Παραγοντοποιούμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	-30	3
	3	9	30	
<hr/>				
1	3	10	0	

άρα $g(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 10)$

Επομένως το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x - 30}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 10)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 10) = 28$$

4. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \quad \beta. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5}$$

Συζυγείς παραστάσεις

$$\star \sqrt{A+B} \rightarrow \sqrt{A-B}$$

$$\star \sqrt{A-B} \rightarrow \sqrt{A+B}$$

$$\star \sqrt{A} - \sqrt{B} \rightarrow \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

$$\star \sqrt{A} + \sqrt{B} \rightarrow \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

Αν η ύπαρξη μιας ρίζας αποτελεί εμπόδιο για την παραγοντοποίηση του κλάσματος, πολλαπλασιάζουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση.

Λύση

$$\begin{aligned}\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}^2 - 3^2}{x - 9} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x - 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5} \frac{\sqrt{2x-1} + 3}{\sqrt{2x-1} + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}^2 - 3^2}{x - 5} \frac{1}{\sqrt{2x-1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 1 - 9}{x - 5} \frac{1}{\sqrt{2x-1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{x - 5} \frac{1}{\sqrt{2x-1} + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{x - 5} \frac{x - 5}{\sqrt{2x-1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 3} = \frac{2}{3 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9}$$

Να βρείτε: α. Το πεδίο ορισμού της f

β. Το όριο $\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)]$

γ. Την τιμή που πρέπει να πάρει ο πραγματικός αριθμός λ , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lambda^3 - \frac{23}{8}$$

Λύση:

α. Πρέπει $x^2 - 9 \neq 0$, άρα:

$$x^2 \neq 9 \iff x \neq 3, \quad x \neq -3$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\beta. \ell = \lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -3} \left[(x+3) \cdot \frac{2x+3}{x^2-9} \right] = \lim_{x \rightarrow -3} \left[(x+3) \cdot \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x+3}{x-3} \right) = \frac{-6+3}{-3-3} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{2}}$$

γ. Θέλουμε να είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3) \cdot f(x)] = \lambda^3 - \frac{23}{8}$$

Άρα:

$$\frac{1}{2} = \lambda^3 - \frac{23}{8} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{1}{2} + \frac{23}{8} \Leftrightarrow \lambda^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \frac{3}{2}}$$

Όρια Πολύκλαδων συναρτήσεων

Αν η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τρόπο για $x < x_0$ και για $x > x_0$, δηλαδή είναι της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{για } x < x_0 \\ h(x) & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$$

Για να βρούμε το όριο της συνάρτησης στο x_0
κάνουμε τα εξής :

α. Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για $x < x_0$
(συμβολίζεται με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)

Έστω ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1$$

β. Βρίσκουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για $x > x_0$
(συμβολίζεται με $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$)

Έστω ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell_2$$

γ. Αν $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ τότε λέμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Παραδείγματα

1. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$ τότε:

★ Για $x < 1$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1$$

★ Για $x > 1$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1^3 = 1$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

2. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 4 \\ x^2, & x \geq 4 \end{cases}$ τότε

★ Για $x < 4$, είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} 3x = 3 \cdot 4 = 12$$

★ Για $x \geq 4$, είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 4^2 = 16$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Τις απορίες και τις ερωτήσεις σας στείλτε τις στο e-mail:

v_gimis@hotmail.com

**Όταν ομαδοποιηθούν οι απορίες και οι ερωτήσεις σας θα οριστεί
ζωντανό μάθημα για να τις συζητήσουμε.**