

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

## **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

### **ΜΑΘΗΜΑ 3ο**

#### **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

- Συνέχεια συνάρτησης

**Βασίλης Γκιμίσης**

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνεχής στο  $x_0 \in A$  αν

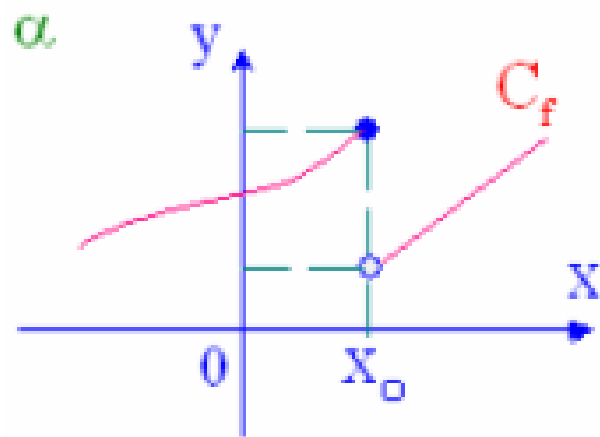
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### Παρατηρήσεις:

- Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in A$ , τότε λέγεται συνεχής στο  $A$ .
- Η συνέχεια μιας συνάρτησης εξετάζεται μόνο σε σημεία  $x_0$  που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.

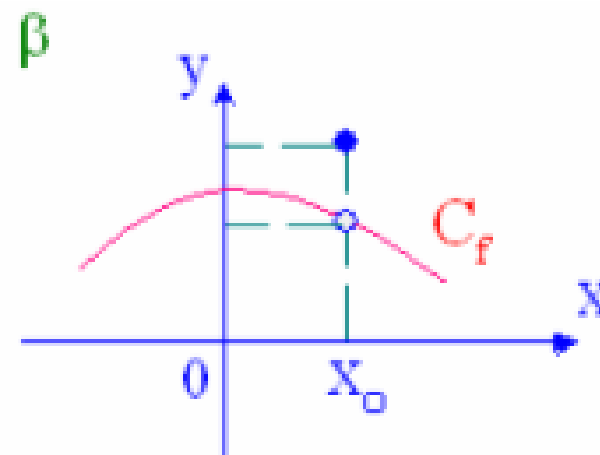
▪ Αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα τότε η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής γραμμή

- Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , **δεν είναι συνεχής** στο  $x_0 \in A$  στις παρακάτω περιπτώσεις:



Το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  δεν υπάρχει, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$



Το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει, όμως είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

■ Όλες οι γνωστές μας συναρτήσεις και οι πράξεις οι πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς.

### Παραδείγματα:

Για  $x_0 \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\alpha. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$$

$$\gamma. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

$$\delta. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \ell \nu x = \ell \nu x_0, \quad \text{αν} \quad x_0 > 0$$

## Παραδείγματα:

**1.** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις που ακολουθούν.

$$\alpha. \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \beta. \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

Λύση:

**α.** Για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $x_0 \neq 0$  ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$$

Άρα η  $f$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με  $x \neq 0$ .

**β.** Για κάθε  $x_0 \neq -1$  έχουμε  $x_0 + 1 \neq 0$  και τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 - 1}{x_0 + 1} = g(x_0)$$

Άρα η  $g$  είναι συνεχής για κάθε  $x \neq -1$ .

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση που ακολουθεί:

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση:

\*\* Για  $x < 1$ , η συνάρτηση είναι:  $h(x) = x+1$

Άρα είναι συνεχής.

\*\* Για  $x > 1$ , είναι:  $h(x) = 2-x$

Άρα και σ' αυτή την περίπτωση είναι συνεχής.

\*\* Ειδικότερα στο σημείο  $x_0 = 1$ , παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 1+1 = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 2-1 = 1$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$$

Δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ , επομένως δεν είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

3. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu(x^2 + 9), \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής.

Λύση:

### Υπενθύμιση

Αν δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και οι πράξεις που ορίζονται μεταξύ αυτών θα είναι συνεχείς.

Η συνάρτηση  $g(x) = x^2 + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Επίσης και η συνάρτηση  $h(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

Επειδή:

$$f(x) = (h \circ g)(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

η  $f$  θα είναι επίσης συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}, & x < 0 \\ -3 + \beta, & x = 0 \\ e^x - \alpha, & x > 0 \end{cases}$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , σταθεροί αριθμοί.

I. Να βρείτε:

α.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

β.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

γ. Την τιμή του  $\alpha$  ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

II. Αν  $\alpha = 4$ , να υπολογίσετε τον αριθμό  $\beta$  ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x = 0$ .

(Πανελλήνιες 2007, Ημερήσια Τ.Ε.Ε.)



### Λύση:

$$\begin{aligned} \text{I. } \alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

$$\beta. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha$$

γ. Για να υπάρχει το όριο, θα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\text{άρα:} \quad -3 = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = 4}$$

II. Για να είναι συνεχής στο  $x = 0$ , θα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\text{Όμως για } \alpha = 4, \text{ είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$$

$$\text{Άρα πρέπει:} \quad -3 + \beta = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta = 0}$$

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**Τις απορίες και τις ερωτήσεις σας στείλτε τις στο e-mail:**

**[v\\_gimis@hotmail.com](mailto:v_gimis@hotmail.com)**

**Όταν ομαδοποιηθούν οι απορίες και οι ερωτήσεις σας θα οριστεί  
ζωντανό μάθημα για να τις συζητήσουμε.**