ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Γραφική Παράσταση συνάρτησης
- Μονοτονία
- Ακρότατα

Βασίλης Γκιμίσης

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Γραφική παράσταση της f στο σύστημα συντεταγμένων xOy

λέγεται το σύνολο των σημείων $M(\alpha,\beta)$

του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\beta = f(\alpha)$$

Παρατηρήσεις

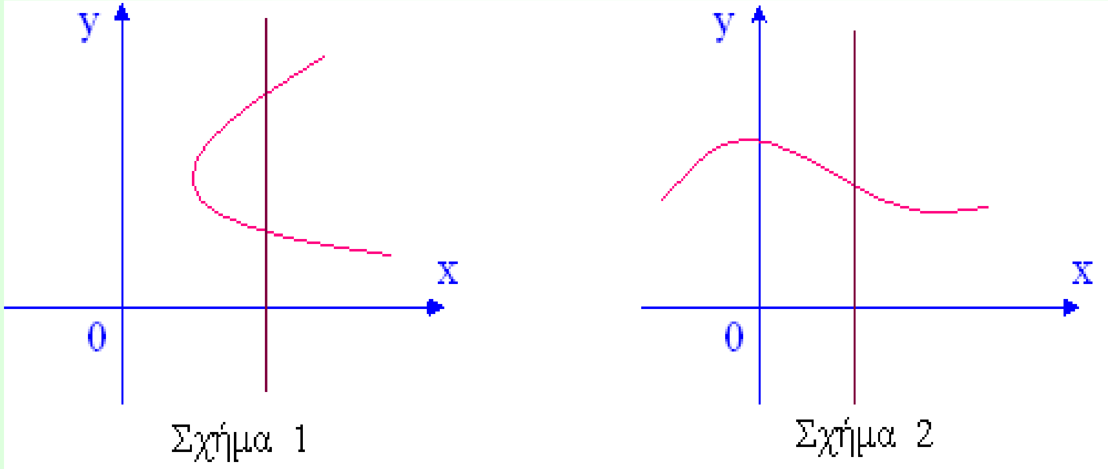
- Η γραφική παράσταση συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με C_f
- Αν δοθεί συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και σημείο $M(\alpha,\beta)$ και μας ζητήσουν να ελέγξουμε αν **μπορεί το σημείο Μ να ανήκει στη** C_f τότε:

✓ Ελέγχουμε αν $\alpha\in A$

✓ Ελέγχουμε αν ισχύει $f(\alpha)=\beta$

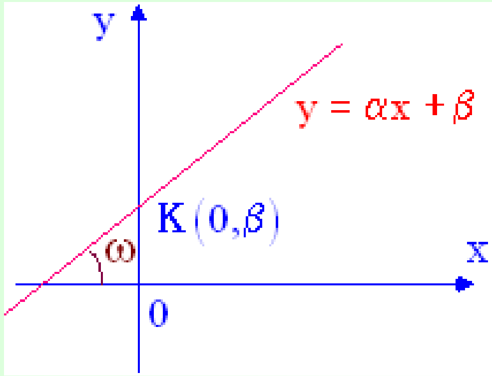
▪Αν δοθεί μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων, αυτή μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο αν οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία στον άξονα των τεταγμένων $y'y$

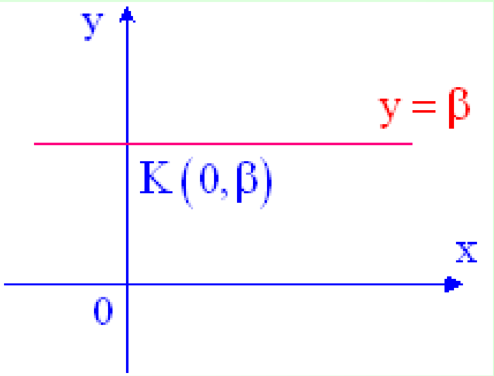
τέμνει την γραμμή σε ένα το πολύ σημείο.



Η γραμμή στο σχήμα 1 δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, ενώ η γραμμή στο σχήμα 2 μπορεί να είναι.

Γραφικές παραστάσεις «Γνωστών» συναρτήσεων





Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \alpha \cdot x + \beta$$

τέμνει τον άξονα στο σημείο

$K(0,\beta)$ και έχει συντελεστή

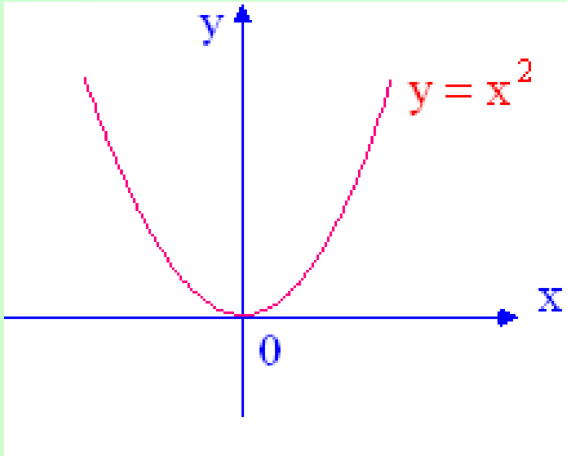
$$\alpha = \varepsilon\varphi\omega$$

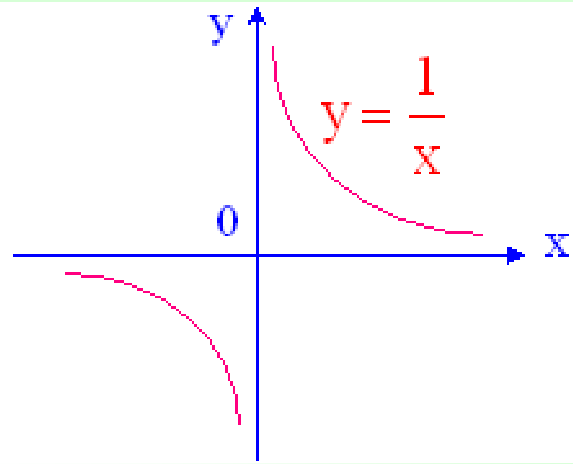
Η γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης:

$$f(x) = \beta$$

τέμνει τον άξονα στο σημείο και έχει συντελεστή:

$$\alpha = 0$$





Η γραφική παράσταση της:

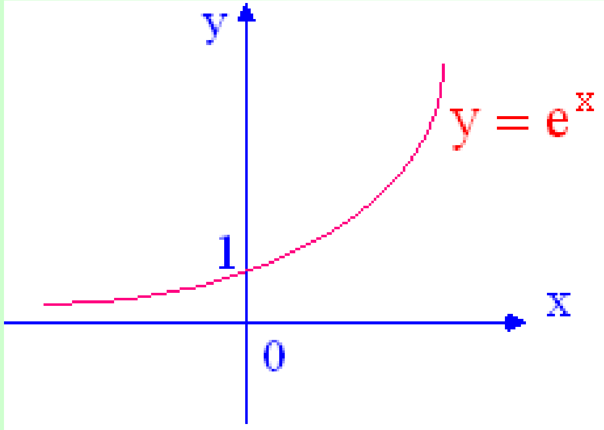
$$f\left(x\right) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}^*$$

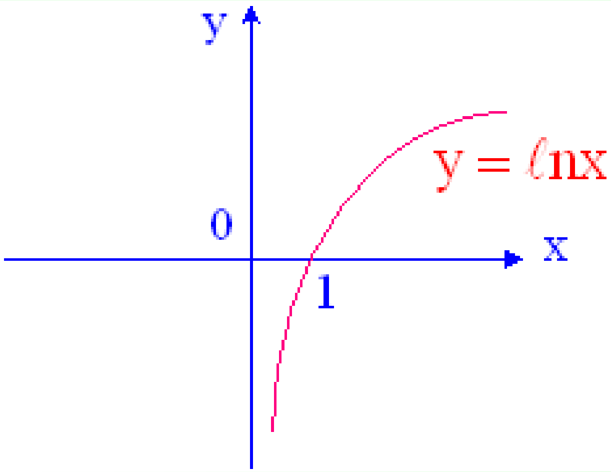
Είναι παραβολή

Η γραφική παράσταση της:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι υπερβολή.





Η γραφική παράσταση της

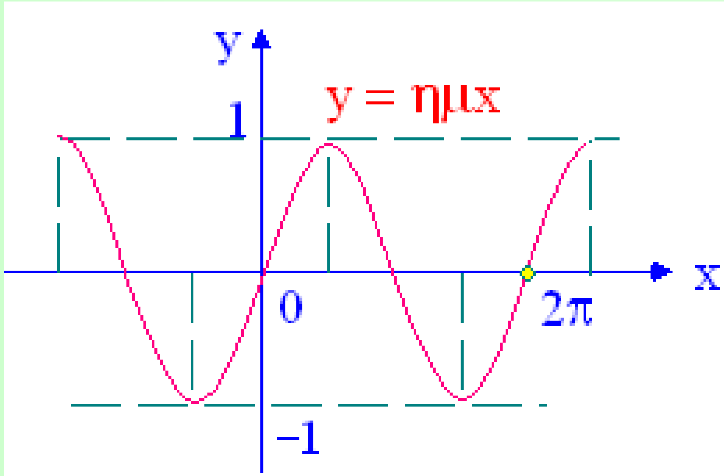
της εκθετικής
συνάρτησης

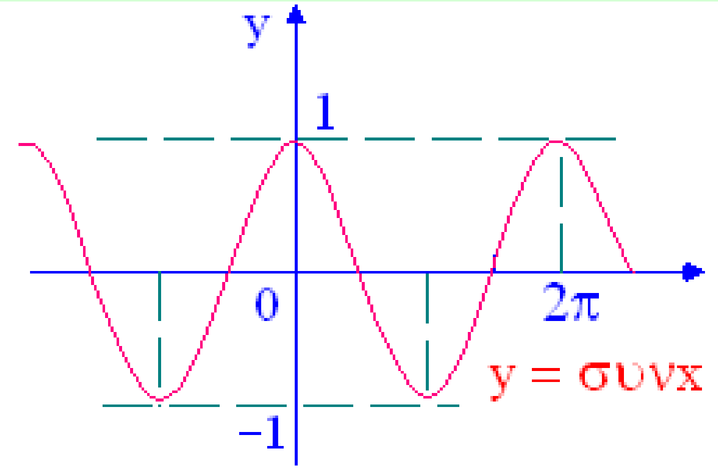
$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της

της λογαριθμικής
συνάρτησης

$$f(x) = \ell nx, \qquad x \in (0, +\infty)$$





Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

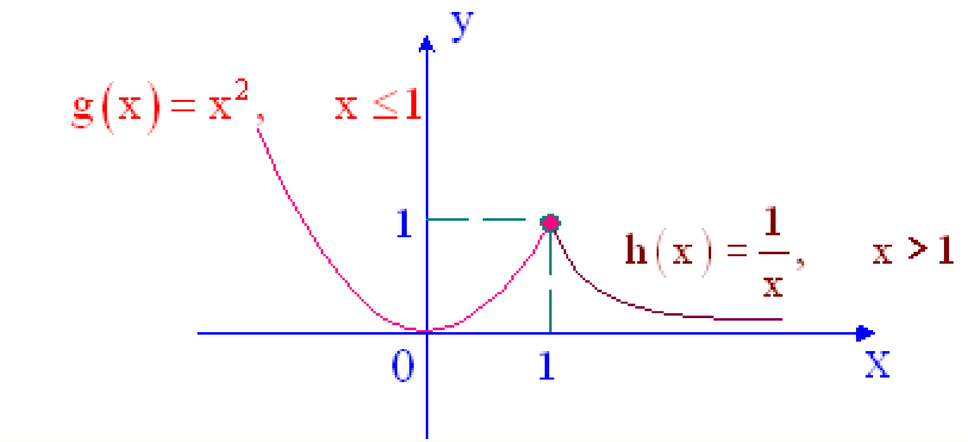
Παράδειγμα

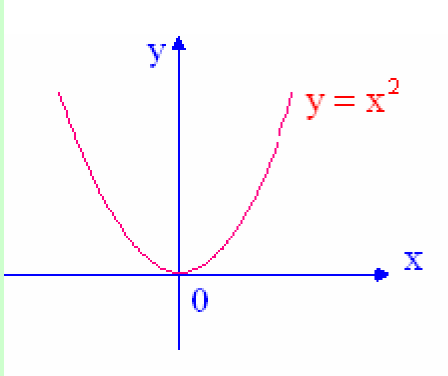
Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$

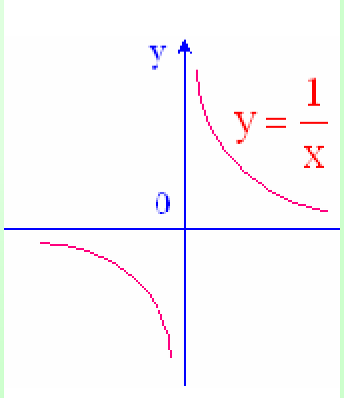
Λύση Σχεδιάζουμε αρχικά την $g(x)=x^2$

και αποκόπτουμε το τμήμα της για $x>1$

Έπειτα σχεδιάζουμε την $h(x)=\dfrac{1}{x}$ μόνο για $x>1$







4. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$ όταν για **οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

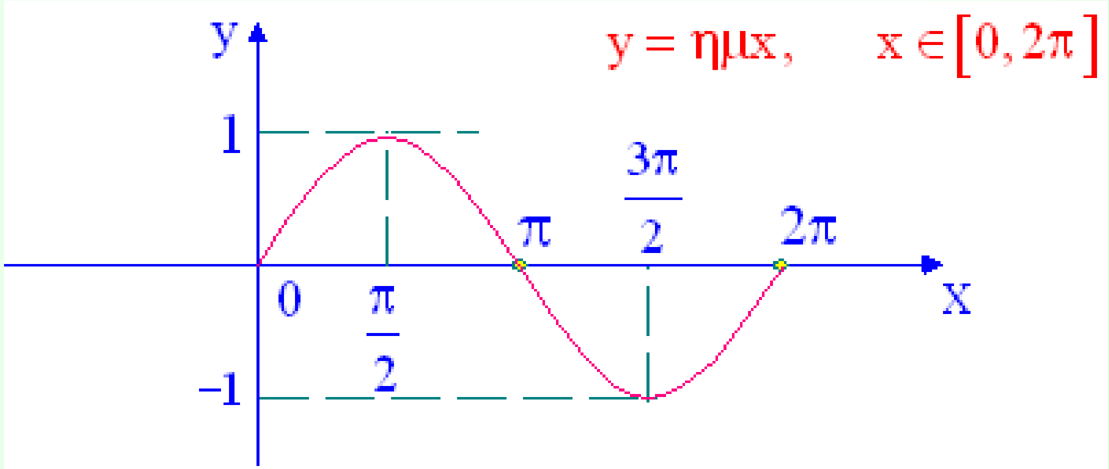
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα **διάστημα Δ** $(\Delta \subseteq A)$ όταν για **οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

- Μια συνάρτηση που είναι **γνησίως αύξουσα** ή **γνησίως φθίνουσα** λέγεται **γνησίως μονότονη**

▪Μπορεί μια συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο (ή κάποια) διάστημα (ή διαστήματα) του πεδίου ορισμού της και ταυτόχρονα να είναι γνησίως φθίνουσα σε κάποιο άλλο.

Παράδειγμα



Η συνάρτηση $f(x) = ημx, \quad x \in [0, 2\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα

στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Ορισμός του τοπικού μέγιστου

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ **παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο** $x_1 \in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_1 **του** x_1 τέτοια ώστε:

$$U_1 \subseteq A \quad \text{και} \quad f(x) \le f(x_1) \quad \text{για κάθε} \quad x \in U_1$$

Το **τοπικό μέγιστο** είναι το $f(x_1)$

Ορισμός του τοπικού ελάχιστου

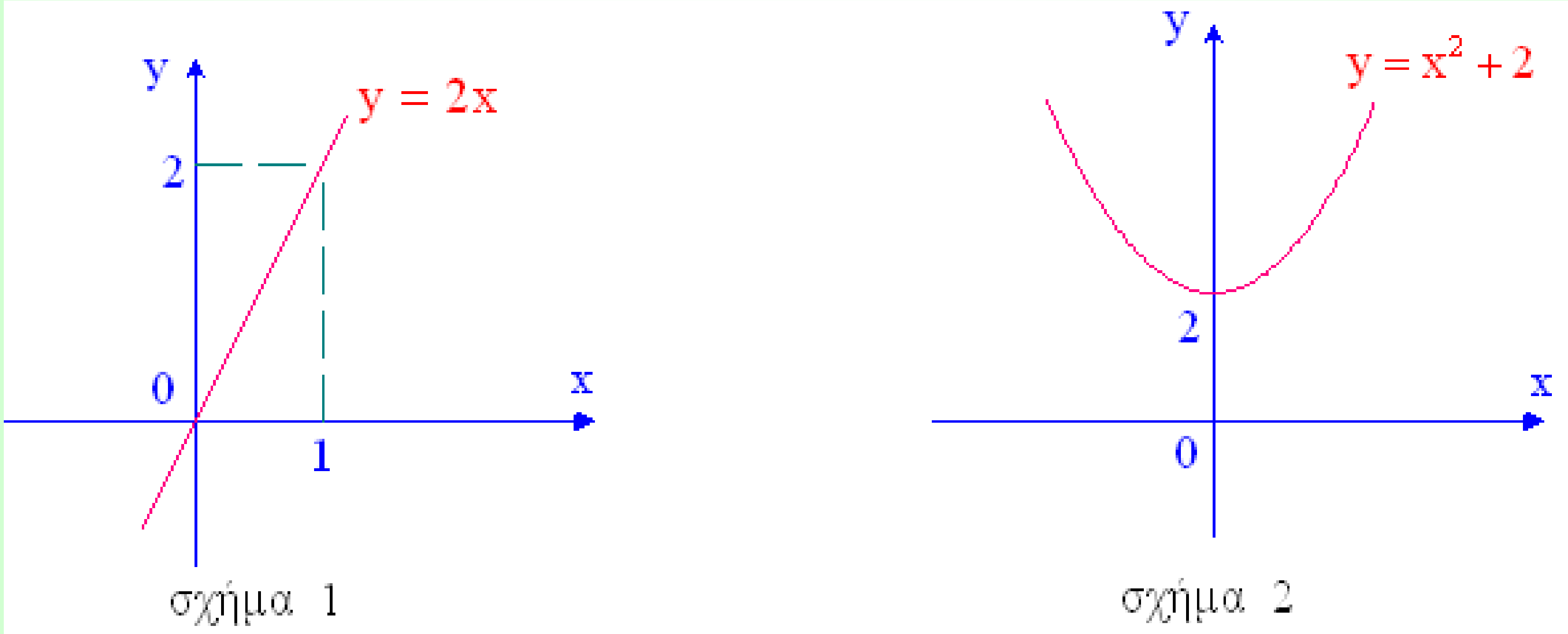
Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι **παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο** $x_2 \in A$ αν υπάρχει **περιοχή** U_2 **του** x_2 τέτοια ώστε

$$U_2 \subseteq A \quad \text{και} \quad f(x) \ge f(x_2) \quad \text{για κάθε} \quad x_2 \in U_2$$

Το **τοπικό ελάχιστο** είναι το $f(x_2)$

Μια συνάρτηση **δεν είναι απαραίτητο** να έχει **ακρότατα**. Μπορεί **να έχει μέγιστο και να μην έχει ελάχιστο** (ή το αντίθετο).

<u>Παραδείγματα:</u>

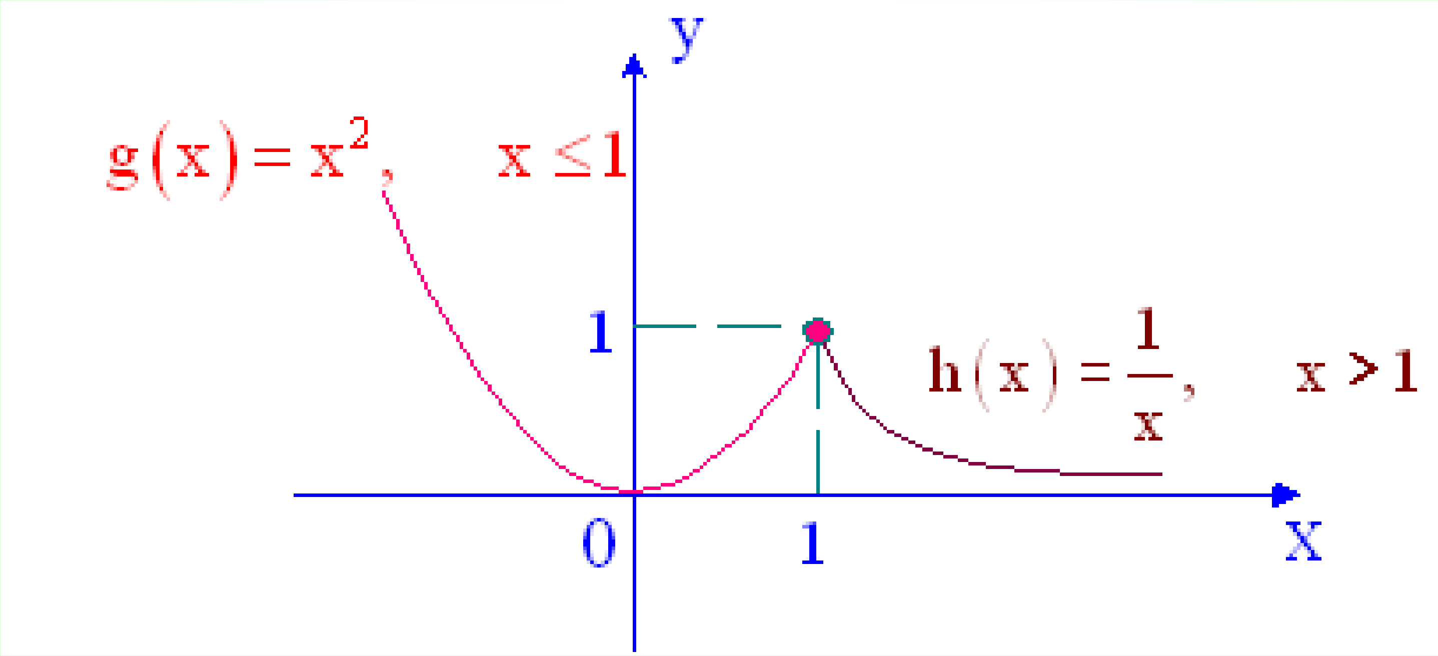


Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Λύση:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Λύση

Επειδή $f(0) = 0$ η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο: $\boxed{(0,0)}$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -2$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι:

$$\boxed{(0,0), \quad (3,0), \quad (-2,0)}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο: $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του **x** η γραφική παράσταση C_f της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

<u>Λύση:</u>

α. Πρέπει να είναι:

$$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f, είναι το :

$$\boxed{A = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)}$$

β. Επειδή αναζητούμε τις τιμές του x για τα οποία τα σημεία της C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, πρέπει να είναι:

$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{x^2-4} < 0$$

Την παραπάνω ανισότητα, λύνουμε με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	//	$+$	//	$-$	0	$+$	

Άρα η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

$$\boxed{x < -2 \quad ή \quad 2 < x < 5}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Τις απορίες και τις ερωτήσεις σας στείλτε τις στο e-mail:

v_gimis@hotmail.com

vgimisis@sch.gr

Όταν ομαδοποιηθούν απορίες και τις ερωτήσεις σας θα ορίσει ζωντανό μάθημα για να τις συζητήσουμε.