ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 1.1 Εισαγωγή στις Πιθανότητες

i. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

1. Αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης.
2. Αναγνωρίζουν τον τύπο επίλυσης ενός προβλήματος πιθανοτήτων.
3. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα του χώρου αυτού.
4. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα στη γλώσσα συνόλων και αντίστροφα.
5. Με την βοήθεια της σχετικής συχνότητας να ορίζουν την πιθανότητα του ενδεχομένου.
6. Να μορούν να αναπαριστούν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων με την βοήθεια του διαγράμματος Venn και να επιλύουν προβλήματα.

ii. **ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ:** Καθοδήγηση – ερωτήσεις

iii. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Πολλαπλή (Παραγωγική-αναγωγική-επαγωγική-αφαιρετική κλπ)

iv. **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Πίνακας, Η/Υ (λογισμικό: Geogebra)

v. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ Διάρκειας 5 ωρών διδασκαλίας.**

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

Αντικείμενο: Πόσα είδη προβλημάτων τύχης έχουμε;

Για τον διδάσκοντα: Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μια λίστα καθημερινών προβλημάτων τα οποία είναι χαρακτηριστικά των μεθόδων που χρησιμοποιεί η θεωρία πιθανοτήτων.

Πεποίθησή μας είναι ότι αν κάποιος αναγνωρίζει τον τρόπο που επιλύεται ένα πρόβλημα – με απαρίθμηση, με γεωμετρία ή με άλγεβρα – μπορεί καλύτερα να κατανοήσει τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος πιθανοτήτων. Ένα πρόβλημα τύχης δεν λύνεται μόνο με απαρίθμηση όπως αυτή παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο. Πολλά προβλήματα επιλύονται με γεωμετρικές και αλγεβρικές μεθόδους.

Το πλεονέκτημα αυτής της παρουσίασης είναι πολλαπλό.

Πρώτο: η καλή οργάνωση απλοποιεί γενικά το μαθηματικό πρόβλημα και για να το δείξουμε αυτό χρησιμοποιούμε τους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων πιθανοτήτων.

Δεύτερο: αποδεικνύουμε την δυνατότητα της έξυπνης ταξινόμησης και οργάνωσης.

Τρίτο: αναδεικνύουμε τρείς τρόπους υπολογισμού στα μαθηματικά: την συνδιαστική προσέγγιση (με βάση στην θεωρία αριθμών) , την γεωμετρική και την αλγεβρική.

Τέταρτο: επανερχόμαστε σε ένα πρόβλημα, που θίξαμε στην θεωρία συνόλων και στην επεξεργασία της διάταξης στο $\mathbb{R}$, που είναι ο διαχωρισμός διακριτής και συνεχούς μεταβολής.

ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. *Έχουμε 2 ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουν τα δυο ζάρια μετά από μια ρίψη συνολικό άθροισμα 5.*
2. *Νταϊζη Ντάκ παρκάρει το αυτοκίνητό της στο parking του ξενοδοχείου τυχαία μεταξύ 2:30 μμ και 16:00 μμ. Μετά 30 λεπτά ακριβώς, αφ' ότου παρκάρει, παίρνει το αυτοκίνητό της και φεύγει. Ποια είναι η πιθανότητα να φύγει η Νταϊζη Ντάκ. από το parking μετά από τη 16:00 μμ?*
3. *Έχουμε δυο αριθμούς τον x και τον y. Αν $1 \le x \le 4$ και $2 \le y \le 6$, να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε $x+ y \ge 5$.*
4. *Αν η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη είναι διπλάσια της πιθανότητας να μη βρέξει, ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη;*

ΛΥΣΕΙΣ:

1. Το πλήθος των δυνατών περπτώσεων μετά τη ρίψη 2 ζαριών είναι

1-1	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**1-5**	**1-6**
2-1	**2-2**	**2-3**	**2-4**	**2-5**	**2-6**
3-1	**3-2**	**3-3**	**3-4**	**3-5**	**3-6**
4-1	**4-2**	**4-3**	**4-4**	**4-5**	**4-6**
5-1	**5-2**	**5-3**	**5-4**	**5-5**	**5-6**
6-1	**6-2**	**6-3**	**6-4**	**6-5**	**6-6**

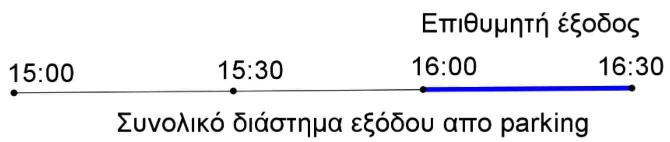
Δηλαδή, σύνολο 6*6 = 36 δυνατές περιπτώσεις. Από αυτές μόνο τα 4 μόνο ενδεχόμενα

1-4	**2-3**	**3-2**	**4-1**

δίνουν άθροισμα 5. Έτσι η πιθανότητα να φέρουν άθροισμα 5 είναι

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2. Μπορούμε να διαιρέσουμε τις ώρες σε λεπτά, τα λεπτά σε δευτερόλεπτα κοκ. Υπάρχουν άπειρες στιγμές που μπορεί η Νταϊζη Ντάκ να φύγει από το ξενοδοχείο. Δεν μπορούμε να μετρήσουμε τους χρόνους για να λύσουμε το πρόβλημα !
Ο χρόνος εδώ είναι ένα συνεχές μέγεθος και για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να λύσουμε διαφορετικά το πρόβλημα. Ας δουμε λίγο το ευθύγραμμο τμήμα που παριστάνει όλες τις πιθανές χρονικές στιγμές αναχώρησης της Νταϊζη.



Έτσι η πιθανότητα P να φύγει η Νταϊζη μετά τις 16:00 είναι αν με A συμβολίσουμε την διάρκεια σε λεπτά του επιθυμητού ευθ. τμήματος και με B την διάρκεια σε λεπτά του συνολικού διαστήματος εξόδου:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{30\min}{90\min} = \frac{1}{3}$$

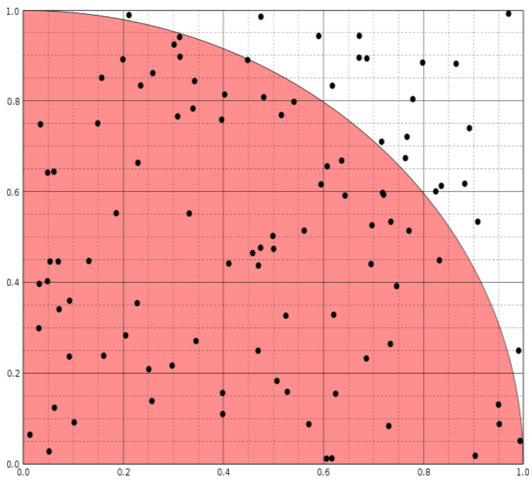
3. Πρίν ξεκινήσουμε να λύνουμε το πρόβλημα ας δούμε πως συνδέεται το εμβαδόν με την πιθανότητα. Προτείνω να πειραματιστούμε με την μέθοδο Monte Carlo για τον υπολογισμό των ψηφίων του π.

   Η μέθοδος κάνει το εξής: Σε ένα τετράγωνο πλευράς 1 ρίχνουμε σφαιρίδια (ελαχίστης ακτίνας) των οποίων σημειώνουμε τη θέση με τις συντεταγμένες (x,y). Το ερώτημα είναι το εξής:

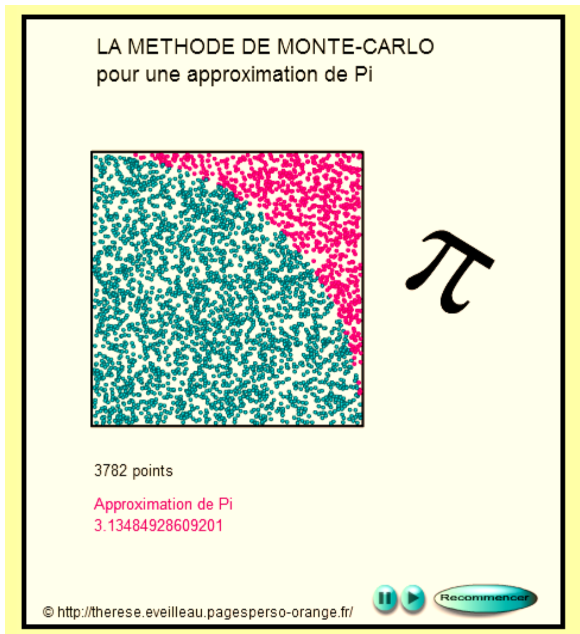
   Πόσα από αυτά τα σφαιρίδια ικανοποιούν την σχέση

   $$\mathbf{x^2 + y^2 < 1} \quad (**)\ ?$$

   Πρίν προσπαθήσουμε να απαντήσουμε ας δούμε μια προσομοίωση στον Η/Υ του προβλήματος, δες στο http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/monte_carlo.htm



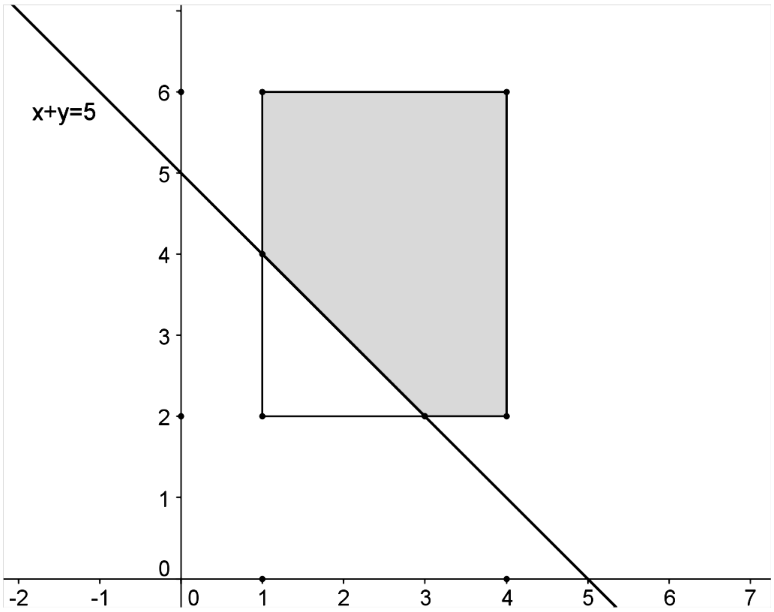
   Στο πρόβλημα αυτό ο υπολογιστής έχει ρίξει 3782(=β) σφαιρίδια στο εσωτερικό του τετραγώνου εκ των οποίων ένας αριθμός, έστω α, ικανοποιεί την συνθήκη (**).



   Αν αφήσουμε το πείραμα να εξελιχθεί έτσι ώστε ο αριθμός των πιπτουσών σφαιρών να γίνει αρκετά μεγάλος, θα δούμε ότι τα σφαιρίδια που ικανοποιούν την συνθήκη (**) συγκεντρώνονται στην πράσσινη περιοχή του δευτέρου σχήματος. Αυτό δεν είναι τίποτε άλλο παρά το ¼ της επιφάνειας του κύκλου με κέντρο την κάτω κορυφή του τετραγώνου και ακτίνα 1. Το εμβαδόν αυτό προφανώς είναι ίσο με π/4.

   Ο αριθμός α των σφαιριδίων που βρίσκονται στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου υπολογίζεται από τον Η/Υ. Έτσι, το πηλίκο $\frac{\alpha}{3782} = \frac{\pi}{4}$ μας δίνει την δυνατότητα αφ΄ενός να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου το σφαιρίδιο να βρεθεί στην θέση έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν την (**) και ταυτόχρονα τα ψηφία του αριθμού π.

Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για το πρόβλημα 3. Προφανώς, όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα 3, δεν μπορούμε να απαριθμήσουμε τον πληθυσμό των επιτυχών επιλογών των μεταβλητών x και y. Έτσι, καταφεύγουμε υποχρεωτικά σε άλλους τρόπους υπολογισμού.



Η επιθυμητή περιοχή είναι η γραμμοσκιασμένη, έτσι αν Β = 3 x 4 = 12 το εμβαδόν του όλου ορθογωνίου παραλλαλογράμμου και Α = 12 – ½ 2 x 2 = 10, είναι το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας, η πιθανότητα να βρεθούν τα x και y στην επιφάνεια Α είναι:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

4. Έστω x η πιθανότητα να βρέξει, τότε η πιθανότητα να μη βρέξει είναι 1 – x. Άρα,

$$x=2(1-x)$$

και x = 2/3.

■

ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

Προσπαθείστε να καθορίσετε τη φύση των παρακάτω προβλημάτων ανάλογα με την τεχνική επίλυσής του, δηλαδή αν μπορεί να λυθεί με τεχνικές απαρίθμησης, γεωμετρικές ή αλγεβρικές.

1) Η Όλγα και ο Ανδρέας παίζουν καθημερινά σκάκι. Η πιθανότητα να κερδίσει η Όλγα τον Ανδρέα κάθε μέρα είναι διπλάσια της πιθανότητας να κερδίσει ο Ανδρέας την Όλγα. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Ανδρέας είναι 3 φορές η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει με ισοπαλία. Ποια η πιθανότητα να έρθει ένα παιχνίδι ισόπαλο.
2) Δύο φίλοι ο Δημήτρης και ο Τάσος ρίχνουν ένα δίκαιο νόμισμα εκ περιτροπής. Ο πρώτος που θα ρίξει κορώνα κερδίζει. Αν ο Δημήτρης ρίχνει πρώτος, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει;
3) Ένα σημείο επιλέγεται τυχαία από το εσωτερικό ενός κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=16$ (κέντρο (0,0) και ακτίνα 4). Βρείτε την πιθανότητα το σημείο αυτό να απέχει το πολύ 1.5 μέτρα από το κέντρο.
4) Ένα κάλπικο νόμισμα έχει 2/3 πιθανότητα να φέρει σε μία ρίψη κορώνα. Το ρίχνουμε 50 φορές, ποια είναι η πιθανότητα ο συνολικό αριθμός των κορώνων να είναι άρτιος;
5) Δύο μαθηματικοί παίρνουν τον καφέ τους στο πρωινό διάλειμμα κάθε μέρα. Φτάνουν στην καφετέρια ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, μεταξύ 9.00 και 10.00 το πρωί και κάθονται μ λεπτά ακριβώς. Να βρεθεί το μ αν η πιθανότητα το να φτάσει ο ένας ενώ ο άλλος είναι ήδη στην καφετέρια, είναι 40%.

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ

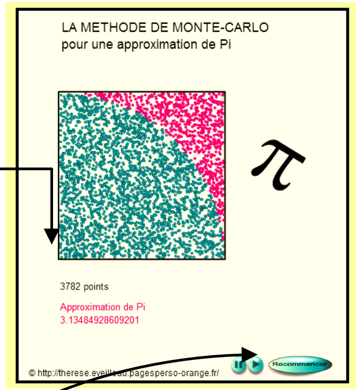
1) Να λύσετε το 1, 3 και 5 πρόβλημα.

2) Εργασία: Μπείτε στην ιστοσελίδα της Theresse Eveilleau
   http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/monte_carlo.htm

   Βρισκόμαστε στο site της Theresse Eveilleau και στην προσομοίωση της μεθόδου Monte Carlo. Πρίν πατήστε στο GO, κάνετε έναν πίνακα με τρείς στήλες και 20 γραμμές - όπως είναι ο παρακάτω πίνακας. Προσθέστε απλά 6 γραμμές στο τέλος.

Στόχος μας είναι να μετρήσουμε την προσέγγιση των ψηφίων του αριθμού π μέσα από την πιθανότητα οι συντεταγμένες, x, y, των σφαιριδίων που πέφτουν σε μία επιφάνεια τετραγώνου πλευράς 1μ, να ικανοποιούν την συνθήκη $x^2 + y^2 <1$ (**). Θεωρείστε γνωστό ότι η πιθανότητα ένα σφαιρίδιο να πέσει στο τεταρτοκύκλιο (όπως είδαμε παραπάνω) είναι

$$\frac{\#\text{σφαιριδίων που ικανοποιούν την}(**)}{\#\text{συνολικός αριθμός σφαιριδίων}} = \frac{\pi}{4}$$



Έτσι, για παράδειγμα: αν αριστερά και στο μέσο της επιφάνειας εργασίας, διαβάσουμε ότι ο συνολικός αριθμός των σφαιριδίων που έχουν ριφθεί είναι β=3000 και ο αριθμός των σφαιριδίων που ικανοποιούν την συνθήκη (**) είναι α – τον αριθμό αυτό τον υπολογίζει το σύστημα και δεν τον βλέπουμε, τότε το πηλίκο α/β*4 δίνει μια προσέγγιση του π. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός β, τόσο μεγαλύτερη προσέγγιση των ψηφίων του π έχουμε. Ο ισχυριμός αυτός είναι ο Νόμος των Μεγάλων αριθμών. Τον νόμο αυτόν θέλουμε να κατανοήσουμε μόνο διαισθητικά και κατασκευαστικά. Είναι αρκετός στο σημείο αφετηρίας που είμαστε (πιο κάτω θα δούμε και μια άλλη προσέγγιση).

Κατασκευάστε πρώτα έναν πίνακα όπως αυτός που παραθέτουμε, αλλά μεγαλώστε τον αριθμό των γραμμών, σε 20 για παράδειγμα ή και περισσότερες. Ενεργοποιώντας και σταματώντας τον μετρητή που διαθέτει η προσομοίωση μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των σφαιριδίων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (**).

αριθμός σφαιρών	**προσέγγισης του π που δίνει το πείραμα**	**διαφορά μεταξύ της τιμής π=3.14159265358979 και της προσέγγισης που δίνει το πείραμα**
36	3,444444444	-0,30285179085461
101	3,207920791	-0,06632813720231
642	3,258566978	-0,11697432460336
1666	3,207683073	-0,06609041963950
7057	3,158162544	-0,01656989057982
20088	3,147550777	-0,00595812299322

Να συμπληρώστε τον πίνακά σας.

a. Τι μπορεί να σημαίνουν τα αποτελέσματα της τελευταίας στήλης;
b. Πως θα μπορούσατε να εξηγείσετε με λόγια (γραπτό κείμενο) το ότι η πιθανότητα να πέσει ένα σφαιρίδιο στο τεταρτοκύκλιο είναι περίπου π/4? Δηλαδή, αν ρίξετε 10 σφαίρες στο τετράγωνο, και μόνο 2 εξ αυτών ικανοποιούν την συνθήκη (**), έκανε λάθος η τύχη;
c. Πως θα εξηγούσατε το ότι αν ρίξετε ένα νόμισμα 10 φορές ο αριθμός των κορώνων δεν είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμάτων?
Γιατί λέμε τότε ότι έχουμε πιθανότητα ½ να φέρουμε γράμματα ή κορώνα ?

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προσπαθείστε να καθορίσετε τη φύση των παρακάτω προβλημάτων ανάλογα με την τεχνική επίλυσής του, δηλαδή αν μπορεί να λυθεί με τεχνικές απαρίθμησης, γεωμετρικές ή αλγεβρικές.

1) Η Όλγα και ο Ανδρέας παίζουν καθημερινά σκάκι. Η πιθανότητα να κερδίσει η Όλγα τον Ανδρέα κάθε μέρα είναι διπλάσια της πιθανότητας να κερδίσει ο Ανδρέας την Όλγα. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Ανδρέας είναι 3 φορές η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει με ισοπαλία. Ποια η πιθανότητα να έρθει ένα παιχνίδι ισόπαλο.
2) Δύο φίλοι ο Δημήτρης και ο Τάσος ρίχνουν ένα δίκαιο νόμισμα εκ περιτροπής. Ο πρώτος που θα ρίξει κορώνα κερδίζει. Αν ο Δημήτρης ρίχνει πρώτος, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει;
3) Ένα σημείο επιλέγεται τυχαία από το εσωτερικό ενός κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=16$ (κέντρο (0,0) και ακτίνα 4). Βρείτε την πιθανότητα το σημείο αυτό να απέχει το πολύ 1.5 μέτρα από το κέντρο.
4) Ένα κάλπικο νόμισμα έχει 2/3 πιθανότητα να φέρει σε μία ρίψη κορώνα. Το ρίχνουμε 50 φορές, ποια είναι η πιθανότητα ο συνολικό αριθμός των κορώνων να είναι άρτιος;
5) Δύο μαθηματικοί παίρνουν τον καφέ τους στο πρωινό διάλειμμα κάθε μέρα. Φτάνουν στην καφετέρια ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, μεταξύ 9.00 και 10.00 το πρωί και κάθονται μ λεπτά ακριβώς. Να βρεθεί το μ αν η πιθανότητα το να φτάσει ο ένας ενώ ο άλλος είναι ήδη στην καφετέρια, είναι 40%.