

# **ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2 Α ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** § 1.1 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

**i. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:**

1. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα του χώρου αυτού.
2. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα στη γλώσσα συνόλων και αντίστροφα.

ii. **ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ:** Καθοδήγηση – ερωτήσεις

iii. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Μετωπική (κλασσική)

iv. **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Πίνακας, Η/Υ

v. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2//5**

## 2<sup>η</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

---

### Αντικείμενο: Ο λογισμός των πιθανοτήτων.

1. **Τι είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;**  
Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων
2. **Τι είναι ένα ενδεχόμενο του πειράματος**  
Ένα σύνολο που έχει σαν στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα του πειράματος
3. **Πότε ένα ενδεχόμενο ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ - ΕΙΝΑΙ ΒΕΒΑΙΟ/ΑΔΥΝΑΤΟ**  
**ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ** -> το αποτέλεσμα ενός πειράματος είναι στοιχείο του ενδεχομένου  
**ΒΕΒΑΙΟ** -> Πραγματοποιείται πάντα (πχ το Ω)  
**ΑΔΥΝΑΤΟ** -> Δεν πραγματοποιείται ΠΟΤΕ (πχ το  $\emptyset$ )

### Παράδειγμα:

Ερωτήσεις:

Άσκηση 1: Έχουμε 3 μπάλες σε ένα κουτί, Κόκκινες, Άσπρες και Μαύρες. Τραβάμε μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την τοποθετούμε ξανά στο κουτί. .... (Άσκηση 1)

- 1) Τι είναι δειγματικός χώρος? Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος?
- 2) Τι είναι το ενδεχόμενο? Ποιο είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε την δεύτερη φορά κόκκινη μπάλα.
- 3) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα ενδεχόμενο είναι απλό ή σύνθετο?
- 4) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα ενδεχόμενο είναι αδύνατο?

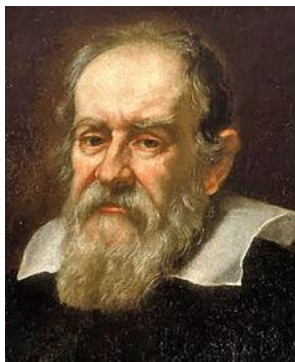
## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

### Πρόβλημα για κατανόηση του ρόλου της απαρίθμησης σαν το αρχικό βήμα κατανόησης του προβλήματος:

Ο Γαλιλαίος (1554-1642) είναι γνωστός για το έργο του στην φυσική και φυσικά για την φράση του ότι «*το βιβλίο της φυσικής είναι γραμμένο με μαθηματικά*». Είναι σχεδόν άγνωστο ότι το 1620



έγραψε ένα μικρό μνημόνιο που αφορούσε το παιχνίδι των ζαριών σε απάντηση ενός αιτήματος του προστάτη του Δούκα της Τοσκάνης. Ο Γαλιλαίος ήταν τότε Πρώτος Μαθηματικός του Πανεπιστημίου της Πίζας και Πρώτος Φιλόσοφος του Μεγάλου Δούκα και είναι αυτός που μαζί με τον Καρντάν έγραψε για πρώτη φορά σχετικά με τον λογισμό των πιθανοτήτων. Τα γραπτά τους

δημοσιεύθηκαν μετά την περίφημη αλληλογραφία μεταξύ του Πασκάλ και Φερμά, η οποία σηματοδοτεί επίσημα την έναρξη της θεωρίας πιθανοτήτων.



Είναι γνωστό ότι ο Μεγάλος Δούκας τον XVII αιώνα, είχε αδυναμία στα τυχερά παιχνίδια. Ένα από τα αγαπημένα του παιχνίδια ήταν να αθροίζει τους αριθμούς που έφερναν τρία ζάρια. Ένα ζάρι είναι ένας κύβος με 6 πλευρές. Σε κάθε πλευρά αναγράφεται ένας εκ των αριθμών 1,2,3,4,5,6.

Σαν μεγάλος παίκτης που ήταν παρατήρησε ότι το άθροισμα 10 εμφανιζόταν ελαφρώς συχνότερα από ότι το άθροισμα 9.

Είπε λοιπόν στο Γαλιλαίο την παρατήρησή του, εκφράζοντας την απορία αφού και στις δύο περιπτώσεις είναι έξι οι δυνατότητες των αριθμών 1,2,3,4,5,6 που φέρνουν άθροισμα 10 ή 9, δηλαδή:

$10 = \underline{6 + 3 + 1} = \underline{6 + 2 + 2} = \underline{5 + 4 + 1} = \underline{5 + 3 + 2} = \underline{4 + 4 + 2} = \underline{4 + 3 + 3}$  (6 δυνατότητες)

$9 = \underline{6 + 2 + 1} = \underline{5 + 3 + 1} = \underline{5 + 2 + 2} = \underline{4 + 4 + 1} = \underline{4 + 3 + 2} = \underline{3 + 3 + 3}$  (6 δυνατότητες)

Δεν θα εξηγήσουμε εδώ το γιατί θεωρήθηκε η παρατήρηση αυτή παράδοξο.... Μπορούμε όμως να κάνουμε το πρώτο βήμα για την προσέγγισή του.

Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A και ποιο για το ενδεχόμενο B; Μπορείτε να δώσετε μια πρώτη πρόχειρη απάντηση, στο πρόβλημα;

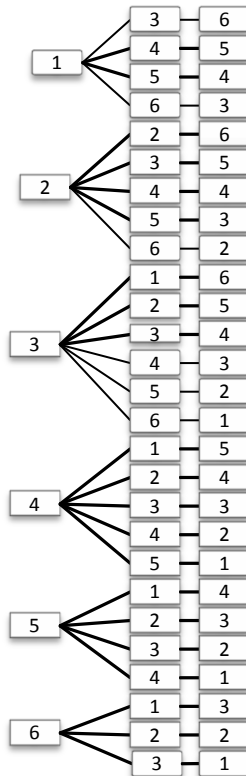
## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

Δενδροδιαγράμα ενδεχομένου Α

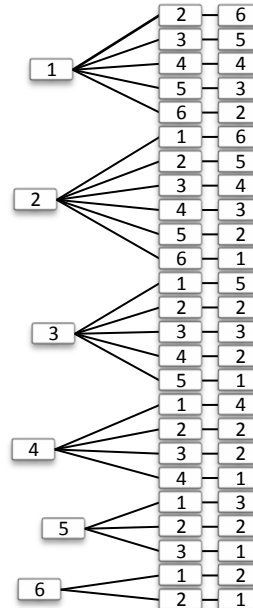
Άθροισμα ενδείξεων = 10



$$N(A) = 27$$

Δενδροδιάγραμμα ενδεχομένου Β

Άθροισμα ενδείξεων = 9



$$N(B) = 25$$

Έτσι, δικαιολογείται κατα κάποιον τρόπο το γιατί η πιθανότητα να φέρουν τα ζάρια άθροισμα = 10 είναι μεγαλύτερη (ελαφρώς) από την πιθανότητα να φέρουν άθροισμα = 9. Η απαρίθμηση των περιπτώσεων είναι αναγκαία για τον εξορθολογισμό του ερωτήματος.

## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Αυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

---

### Εισαγωγή στο μάθημα (καθοδηγούμενη εξάσκηση)

Είδαμε στο πρώτο μάθημα το εξής πρόβλημα, το οποίο χαρακτηρίσαμε και αλγεβρικό. Ποιος ήταν ο λόγος;

*Αν η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη είναι διπλάσια της πιθανότητας να μη βρέξει, ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη;*

*Ονομάσαμε  $P$  (να βρέξει αύριο) και  $P'$  (να μην-βρέξει αύριο).*

*Τότε:  $P' = 1 - P$ . Άρα η εξίσωση είναι :  $P = 2(1 - P)$ .*

Ο αλγεβρικός αυτός φορμαλισμός του προβλήματος είναι ικανός για την επίλυση μη προφανών λύσεων σε προβλήματα πιθανοτήτων, όπως θα δούμε στο τέλος της παραγράφου.

Ακολουθεί ο πίνακας μετασχηματισμών (οι μαθητές έχουν φωτοτυπία):

**Ορισμός:** Λέμε ότι 2 ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα αν  $A \cap B = \emptyset$ .

## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Σήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

α / α	Λεκτική Διατύπωση	Με διάγραμμα Venn	Συνολοθεωρητική έκφραση
1	Δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α ή «ΟΧΙ Α»		$A'$
2	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον ενδεχόμενο από τα Α και Β ή «Α ή Β»		$A \cup B$
3	Δεν πραγματοποιείται κανένα ενδεχόμενο από τα Α και Β ή «ΟΧΙ (Α ή Β)»		$(A \cup B)'$
4	Πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β ή «Α και Β»		$A \cap B$ αν $A \cap B = \emptyset$ λέμε ότι τα ενδεχόμενα Α & Β είναι ασυμβίβαστα
5	Από τα ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιείται μόνο το Α ή «Α και ΟΧΙ Β»		$A \cap B' \text{ ή } A - B$
6	Από τα ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιείται μόνο ένα ή «(Α και ΟΧΙ Β) ή (Β και ΟΧΙ Α)»		$(A \cap B') \cup (B \cap A')$ ή $(A - B) \cup (B - A)$
7	Πραγματοποιείται το πολύ ένα ενδεχόμενο από τα Α και Β ή «όχι και τα δύο ταυτόχρονα» ή «ΟΧΙ (Α και Β)»		$(A \cap B)'$

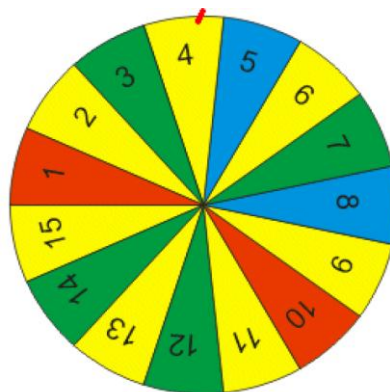
## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

2) Ας δούμε ένα παράδειγμα (η δραστηριότητα Δ 6 απαιτεί περίπου 10 min)  
Ένας δίσκος, χωρισμένος σε 15 κυκλικούς τομείς, περιστρέφεται και σταματά στο σημείο που δείχνει ο δείκτης στο σχήμα:

1. Το ενδ. **A**: ο αριθμός να είναι **πολ/σιο του 5**.
2. Το ενδ. **B**: ο αριθμός να είναι **> 7**.
3. Το ενδ. **Γ**: ο αριθμός να μην είναι **πολ/σιο του 5**.
4. Το ενδ. **Δ**: ο αριθμός να είναι **πολ/σιο του 5 και >7**.
5. Το ενδ. **E**: ο αριθμός να είναι **> 4 και < 12**.
6. Το ενδ. **Z**: να είναι **πολ/σιο του 5 και μεταξύ 4 και 12**.
7. Ποιο είναι το ενδεχόμενο  $\Delta^c$
8. Ποιο είναι το ενδεχόμενο  $A \cap \Delta^c$
9. Εκφράστε λεκτικά και βρείτε το ενδεχόμενο  $(A-B) \cup (B-A)$



**Λύση:**

- 1)  $A = \{5, 10, 15\}$
- 2)  $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- 3)  $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\} = A^c$
- 4)  $\Delta = \{10, 15\} = A \cap B$
- 5)  $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- 6)  $Z = \{5, 10\} = A \cap E$
- 7)  $\Delta^c$  = να πραγματοποιείται ένα ή κανένα από τα A και B - όχι και τα δύο ταυτόχρονα - ή  
 $\Delta^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$
- 8)  $A \cap \Delta^c = \{5\}$
- 9) Μόνο το ένα από τα A και B :  
 $(A-B) \cup (B-A) = \{5\} \cup \{8, 9, 11, 12, 13, 14\} = \{5, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$

■

**Ανατροφοδότηση : συνδέστε τις προτάσεις της Στήλης 1 με την**

Στήλη 1	Στήλη 2
α. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B.	1. $A'$
β. Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A, B.	2. $A - B$
γ. Δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A.	3. $(A \cup B)'$
δ. Πραγματοποιείται μόνο το A από τα ενδεχόμενα A, B.	4. $(A \cap B)'$
ε. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα A και B.	5. $A \cup B$

**αντίστοιχη της Στήλης 2:**

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

## 1) (Πρόβλημα – Ανάδειξης του ρόλου της απαρίθμησης) Το Παράδοξο του Μεγάλου Δούκα της Τοσκάνης

Ο Γαλιλαίος (1554-1642) είναι γνωστός για το έργο του στην φυσική και φυσικά για την φράση του ότι «*το βιβλίο της φυσικής είναι γραμμένο με μαθηματικά*». Είναι σχεδόν άγνωστο ότι το 1620 έγραψε ένα μικρό μνημόνιο που αφορούσε το παιχνίδι των ζαριών σε απάντηση ενός αιτήματος του προστάτη του Δούκα της Τοσκάνης. Ο Γαλιλαίος ήταν τότε Πρώτος Μαθηματικός του Πανεπιστημίου της Πίζας και Πρώτος



Φιλόσοφος του Μεγάλου Δούκα και είναι αυτός που μαζί με τον Καρντάν έγραψε για πρώτη φορά σχετικά με τον λογισμό των πιθανοτήτων. Τα γραπτά τους δημοσιεύθηκαν μετά την περίφημη αλληλογραφία μεταξύ του Πασκάλ και Φερμά, η οποία σηματοδοτεί επίσημα την έναρξη της θεωρίας πιθανοτήτων.

Είναι γνωστό ότι ο Μεγάλος Δούκας τον XVII αιώνα, είχε αδυναμία στα τυχερά παιχνίδια. Ένα από τα



αγαπημένα του παιχνίδια ήταν να αθροίζει τους αριθμούς που έφερναν τρία ζάρια. Ένα ζάρι είναι ένας κύβος με 6 πλευρές. Σε κάθε πλευρά αναγράφεται ένας εκ των αριθμών 1,2,3,4,5,6.

Σαν μεγάλος παίκτης που ήταν παρατήρησε ότι το άθροισμα 10 εμφανιζόταν ελαφρώς συχνότερα από ότι το άθροισμα 9.

Είπε λοιπόν στο Γαλιλαίο την παρατήρησή του, εκφράζοντας την απορία αφού και στις δύο περιπτώσεις είναι έξι οι δυνατότητες των αριθμών 1,2,3,4,5,6 που φέρνουν άθροισμα 10 ή 9, δηλαδή:

$10 = \underline{6 + 3 + 1} = \underline{6 + 2 + 2} = \underline{5 + 4 + 1} = \underline{5 + 3 + 2} = \underline{4 + 4 + 2} = \underline{4 + 3 + 3}$   
(6 δυνατότητες)

$9 = \underline{6 + 2 + 1} = \underline{5 + 3 + 1} = \underline{5 + 2 + 2} = \underline{4 + 4 + 1} = \underline{4 + 3 + 2} = \underline{3 + 3 + 3}$   
(6 δυνατότητες)

Δεν θα εξηγήσουμε εδώ το γιατί θεωρήθηκε η παρατήρηση αυτή παράδοξο.... Μπορούμε όμως να κάνουμε το πρώτο βήμα για την προσέγγισή του.

Υποθέστε λοιπόν ότι ρίχνετε τρία ζάρια και σημειώνετε κάθε φορά τις ενδείξεις κάθε πλευράς. Συμβολίζουμε με  $\Omega$  τον δειγματικό χώρο του πειράματος. Δίδεται το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου  $N(\Omega) = 216$ .

Κατασκευάστε δύο δένδροδιαγράμματα, ένα για το ενδεχόμενο



## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

---

A: να φέρω άθροισμα ενδείξεων ίσο με 10

και ένα για το ενδεχόμενο

B: να φέρω άθροισμα ενδείξεων 9

Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου A και ποιο για το ενδεχόμενο B; Μπορείτε να δώσετε μια πρώτη πρόχειρη απάντηση, στο πρόβλημα;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

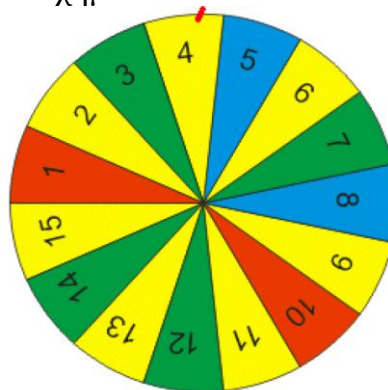
## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

2. Ένας δίσκος, χωρισμένος σε 15 κυκλικούς τομείς, περιστρέφεται και σταματά στο σημείο που δείχνει ο δείκτης στο σχήμα:

1. Το ενδ. **A**: ο αριθμός να είναι **πολ/σιο του 5**.
2. Το ενδ. **B**: ο αριθμός να είναι  **$> 7$** .
3. Το ενδ. **Γ**: ο αριθμός να μην είναι **πολ/σιο του 5**.
4. Το ενδ. **Δ**: ο αριθμός να είναι **πολ/σιο του 5 και  $> 7$** .
5. Το ενδ. **Ε**: ο αριθμός να είναι  **$> 4$  και  $< 12$** .
6. Το ενδ. **Ζ**: να είναι **πολ/σιο του 5 και μεταξύ 4 και 12**.
7. Ποιο είναι το ενδεχόμενο  $\Delta^c$
8. Ποιο είναι το ενδεχόμενο  $A \cap \Delta^c$
9. Ποιο είναι το ενδεχόμενο  $(A-B) \cup (B-A)$



**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΔΙΑΒΑΖΩ: Παρ. 1.1, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ, σελ. 20/1/2/3/4. Πρέπει να γνωρίζω τις σχέσεις που περιγράφονται στον πίνακα στο τέλος της σελίδας 23.

ΔΥΝΩ: Ασκήσεις Σχολικό σελ. 27/8: 4, 6 Ομάδα Α και 2 Ομάδα Β και να συμπληρώσετε τις απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

## Σχέδιο Μαθήματος

Α Λυκείου Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

Ζήνων Λυγάτσικας : ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

---

**Δ6.** Από τους μαθητές του Λυκείου κάποιοι μιλούν καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του Γαλλικού Ινστιτούτου. Ας ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

**A :** ο μαθητής είναι κορίτσι

**B :** ο μαθητής μιλά καλά τη γαλλική γλώσσα

Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

1.  $A \cup B$
2.  $A \cap B$
3.  $B - A$
4.  $A - B$
5.  $A^c \cup B$