ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 3.1 - **<u>Η 1ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΞΙΣΩΣΗ</u>**

i. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

1. Να κατανοήσουν τον ρόλο της αλγεβρικής αναγωγής σε απλούστερες αλγεβρικές προτάσεις που μας οδηγούν στην επίλυση εξισώσεων.
2. Να κατανοήσουν τον αλγοριθμικό χαρακτήρα των λύσεων μιας εξίσωσης.
3. Να μπορούν να διαβάσουν έναν στοιχειώδη αλγόριθμο επίλυσης εξίσωσης.
4. Να μπορούν να λύσουν παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και να είναι σε θέση να αναπαραστήσουν στο Geogebra το αλγεβρικό αποτέλεσμα.
5. Να μπορούν να επιλύουν σύνθετες μορφές εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ii. **ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ:** Καθοδήγηση – ερωτήσεις
iii. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Πολλαπλή (Παραγωγική-αναγωγική-επαγωγική κλπ)
iv. **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Πίνακας, Η/Υ (λογισμικό: Geogebra, Maple)
v. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ Διάρκειας 4 ωρών διδασκαλίας.**

Βιβλιογραφία:

1) **Maple 11** Introductory Programming Guide, MapleSoft 2007.
2) **MATH Seconde,** Hachette Education, 2000,2005,2006.
3) **Manuel Sésamath, 3eme, SESAMATH,** http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=44
4) Σχολικό Βιβλίο Α Λυκείου.
5) ΑΛΓΕΒΡΑ: Π. Τόγκας, Ι και ΙΙ Τόμος
6) **Λυγάτσικας Ζ**. Ασκήσεις Άλγεβρας Α Λυκείου, Βαρβάκειο Λύκειο, 2012.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΟΧΟΙ ΕΚΤΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Οι επιμέρους στόχοι είναι:

1) Αναγνώριση του ρόλου του αλγορίθμου στα αλγεβρικά προβλήματα επίλυσης εξισώσεων.
2) Να μπορούν να αναγάγουν μια πεπλεγμένη μορφή μιας εξίσωσης στην αλγεβρική εξίσωση της μορφής $a\,x + b = 0$.
3) Να επιλύουν εξισώσεις με ταυτόχρονη μελέτη τιμών των παραμέτρων.
4) Να μπορούν να επαληθεύσουν και να αναπαραστήσουν το αποτέλεσμα στο Geogebra.
5) Αναγωγή σε εξίσωση 1^{ου} βαθμού.

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΙ: Αλγοριθμική επίλυση εξίσωσης 1ου βαθμού.

ΑΝΑΚΛΗΣΗ ΓΝΩΣΕΩΝ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $3x - 5 = 0$
2) $6x - t^2 = L$
3) $(3x-8)(2-x) = 0$
4) $|x| = 5$
5) $4x - 3\ (x - 2) = 14x - 12$

Μπορούμε να κατασκυάσουμε ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή που να λύνει εξισώσεις ?

Ας δούμε μερικά παραδείγματα στο MAPLE:

$$\mathrm{solve}(3 \cdot x + 5 = 0,\ x);$$

$$-\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{solve}(0 \cdot x + 5 = 0,\ x);$$

$$\mathrm{solve}(3 \cdot x = 0,\ x);$$

$$0$$

$$\mathrm{solve}(0 \cdot x = 0,\ x)$$

$$x$$

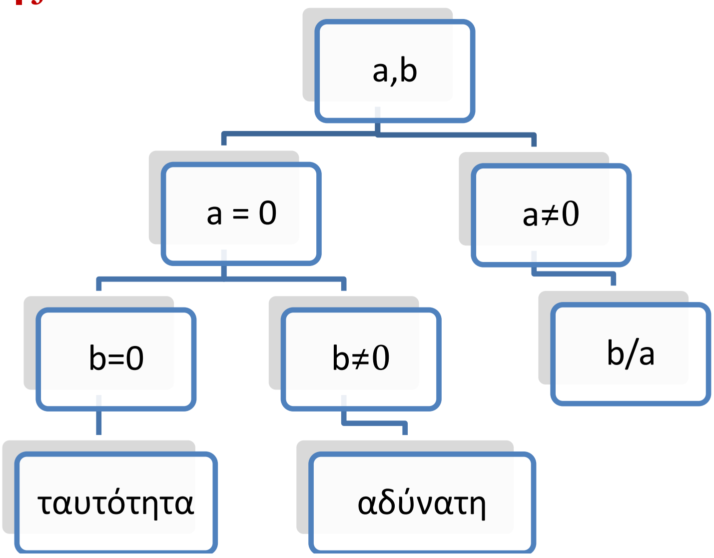
Είναι εφικτό να προσπαθήσουμε και εμείς να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο πρόγραμμα που θα λύνει μια εξίσωση της μορφής **a x = b**;
Τι θα χρειστούμε;

1) Μια απλή γλώσσα προγραμματισμού
2) Μια αναλυτική και «καθαρή διερεύνηση» ιδίως των «παράξενων» περιπτώσεων, πχ. η περίπτωση $0\ x = 4$

Ας συμφωνήσουμε από την αρχή ότι χάρη ευκολίας θα του δίνουμε στην είσοδο μόνο μόνο τις τιμές των συντελεστών a και b και όχι την μορφή της εξίσωσης a x = b.

Διαπραγματευόμαστε με την τάξη την κατασκευή του αλγορίθμου. Πρέπει να καταλήξουμε στο εξής διάγραμμα:

ΛΥΣΗ της a x = b



Τώρα μπορούμε να εξειδικεύσουμε το διάγραμμα στο MAPLE:

```
MyEquation := proc(a, b)
                  if a <> 0 then
                      b / a
                  else
                      if a = 0 and b <> 0 then
                          print(Αδύνατη)
                      else
                          print(Αόριστη)
                      end if
                  end if
              end proc
```

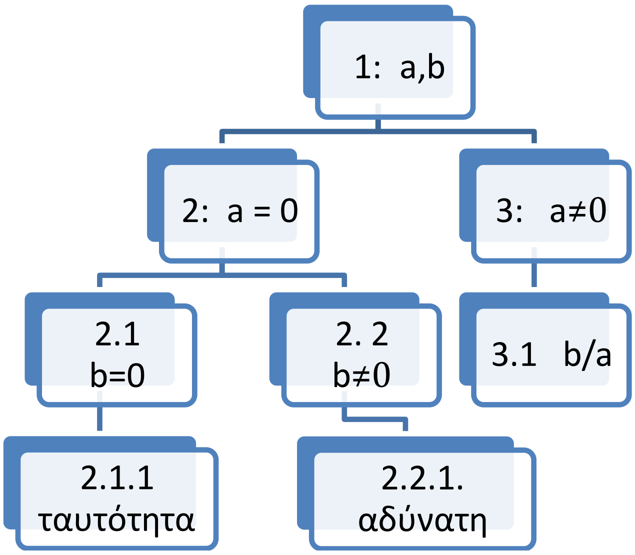
ή στον πραγματικό κώδικα:

$$MyEquation := \mathbf{proc}(a, b)\ \mathbf{if}\ a \neq 0\ \mathbf{then}\ \frac{b}{a}\ \mathbf{else}\ \mathbf{if}\ a = 0\ \mathbf{and}\ b \neq 0\ \mathbf{then}\ print(Αδύνατη)\ \mathbf{else}\ print(Αόριστη)\ \mathbf{end\ if}\ \mathbf{end\ if}\ \mathbf{end\ proc}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ:

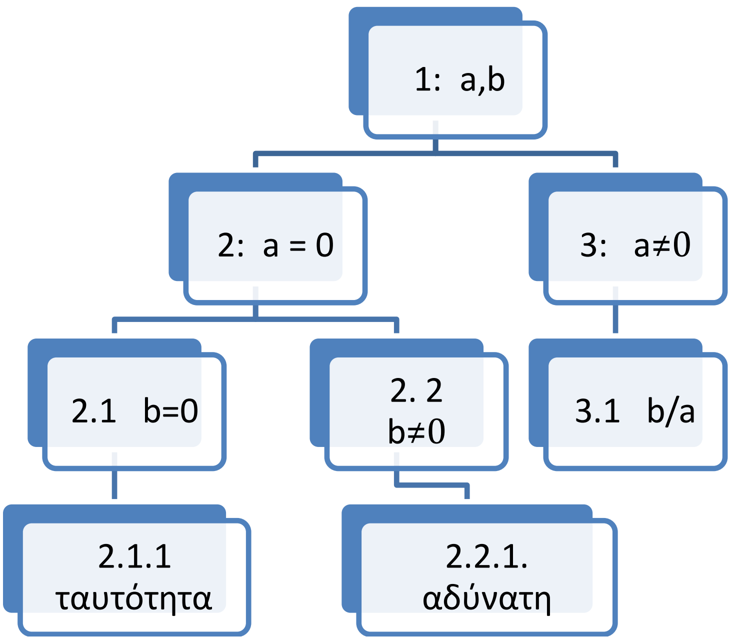
1) Να γράψετε ένα πρόβλημα που να μπορεί να μοντελοποιηθεί η λύση του από μια πρωτοβάθμια εξίσωση?
2) Γιατί η εξίσωση $a\,x + b = 0$ ονομάζεται πρωτοβάθμια ?
3) Να επαναλάβετε τα βήματα που κάνει ο αλγόριθμος ώστε να επιλύση τις παρακάτω εξισώσεις:

$$3\,x + 6 = 0$$



<u>ΣΕΙΡΑ ΒΗΜΑΤΩΝ :</u>

$$0\,x + 2000 = -2012$$



<u>ΣΕΙΡΑ ΒΗΜΑΤΩΝ :</u>

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $3x - 5 = 0$

2) $6x - t^2 = L$

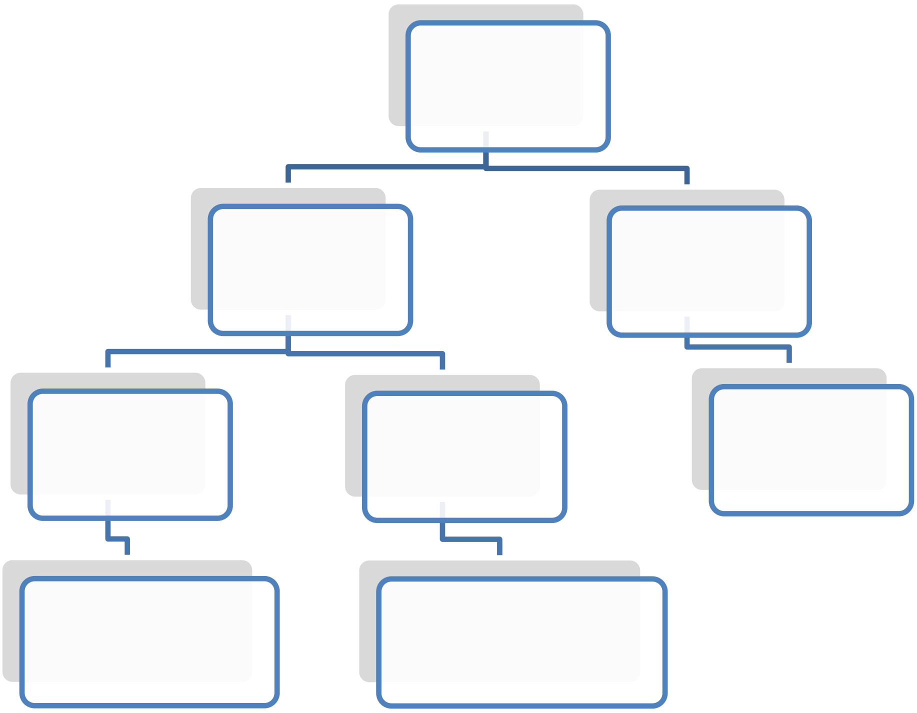
3) $(3x-8)(2-x) = 0$

4) $|x| = 5$

5) $4x - 3(x - 2) = 14x - 12$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Να γράψετε έναν αλγόριθμο ο οποίος να λύνει την εξίσωση **a x = b**



```
MyEquation:= proc (a,b)
            if   .........    then
                    ..........
            else
                    if    .......    then
                            print (............................)
                    else
                            print( ......................)
                    end if
            end if
    end proc
```

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

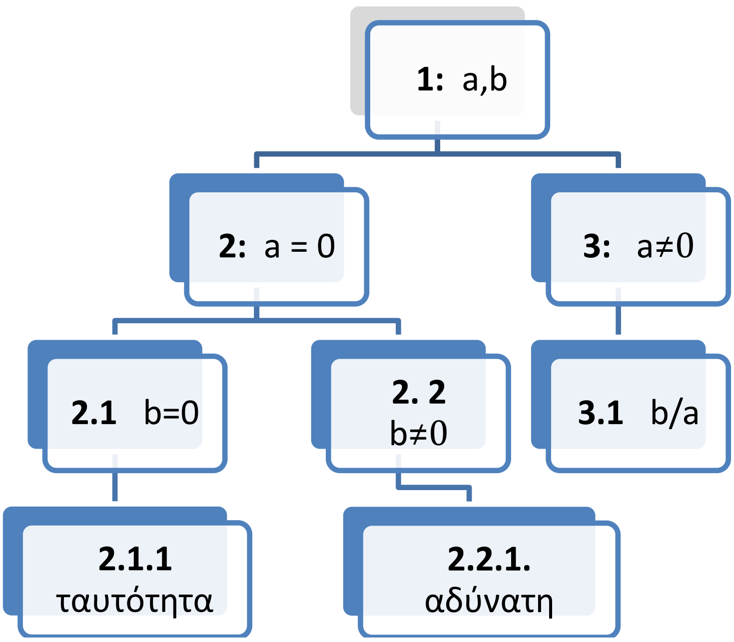
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ:

1) Να γράψετε ένα πρόβλημα που να μπορεί να μοντελοποιηθεί η λύση του από μια πρωτοβάθμια εξίσωση?

2) Γιατί η εξίσωση a x + b = 0 ονομάζεται πρωτοβάθμια ?

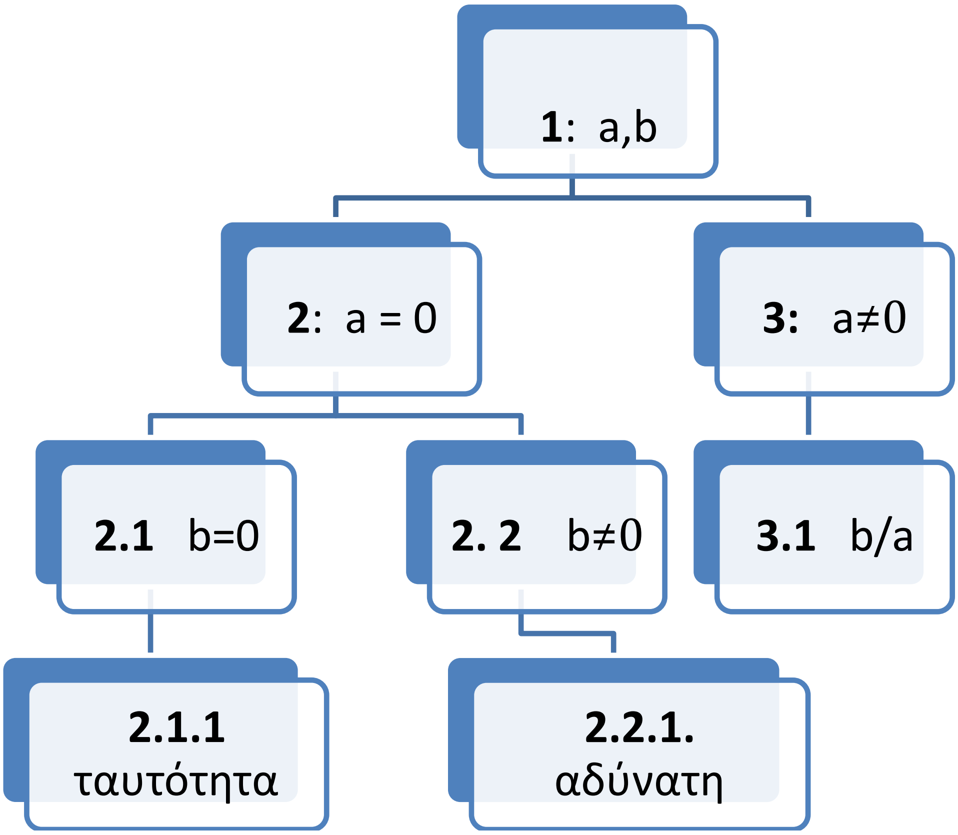
3) Να επαναλάβετε τα βήματα που κάνει ο αλγόριθμος ώστε να επιλύση τις παρακάτω εξισώσεις:

$3x + 6 = 0$



<u>ΣΕΙΡΑ ΒΗΜΑΤΩΝ :</u>

$0x + 2000 = -2012$



<u>ΣΕΙΡΑ ΒΗΜΑΤΩΝ :</u>

- **Διαβάζω: παρ. 3.1 σελ. 79/80 από το σχολικό.**
- **Λύνω 1, 2, 6 Ομάδα Α σελ. 83/84.**

Για τις εξισώσεις 1Α να γράψετε τα αντίστοιχα διαγράμματα.

2^{η} ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

i. **ΣΤΟΧΟΙ:** Γεωμετρική αναπαράσταση της επίλυσης μιας παραμετρικής εξίσωσης 1ου βαθμού.
ii. **ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ:** Καθοδήγηση – ερωτήσεις
iii. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Πολλαπλή (Παραγωγική-αναγωγική-επαγωγική κλπ)
iv. **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Πίνακας, Η/Υ (λογισμικό: Geogebra)

Λύση παραμετρικής εξίσωσης :

Μια παραμετρική εξίσωση 1^{ου} βαθμού, α x = β, είναι μια εξίσωση της οποίας οι συντελεστές α και β δεν είναι καθαροί αριθμοί αλλά περιέχουν μια δευτερεύουσα μεταβλητή. Για να την λύσουμε ακολουθούμε τον αλγόριθμο που έχουμε γράψει. Προφανώς το πρόβλημα εντοπίζετε στην διερεύνηση του συντελεστή α για τις διαφορετικές της δευτερεύουσας μεταβλητής.

Παράδειγμα: Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση : $(\lambda^2-1)\,x - \lambda + 1 = 0$ (σχολικό σελ. 80)

1^{ο} ΒΗΜΑ: Με αλγεβρικές αναγωγές οδηγώ την αρχική στην μορφή α x = β.

Στο παράδειγμά μας : $(\lambda^2-1)\,x = \lambda - 1$
Δεν διαιρώ με το λ^2-1, αν πρώτα δεν εξασφαλίσω ότι αυτός είναι $\neq 0$.

Για τον λόγο αυτό διερευνώ την μορφή που θα πάρει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ που μηδενίζουν τον παράγοντα λ^2-1.

2^{ο} ΒΗΜΑ: Αν $\lambda^2-1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

- Αν $\lambda = 1$, η αρχική εξίσωση γράφεται
$$0\,x = 0$$
η οποία είναι **ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ (ΑΟΡΙΣΤΗ)**

- Αν $\lambda = -1$. η αρχική εξίσωση γράφεται
$$0\,x = -2$$
η οποία είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**

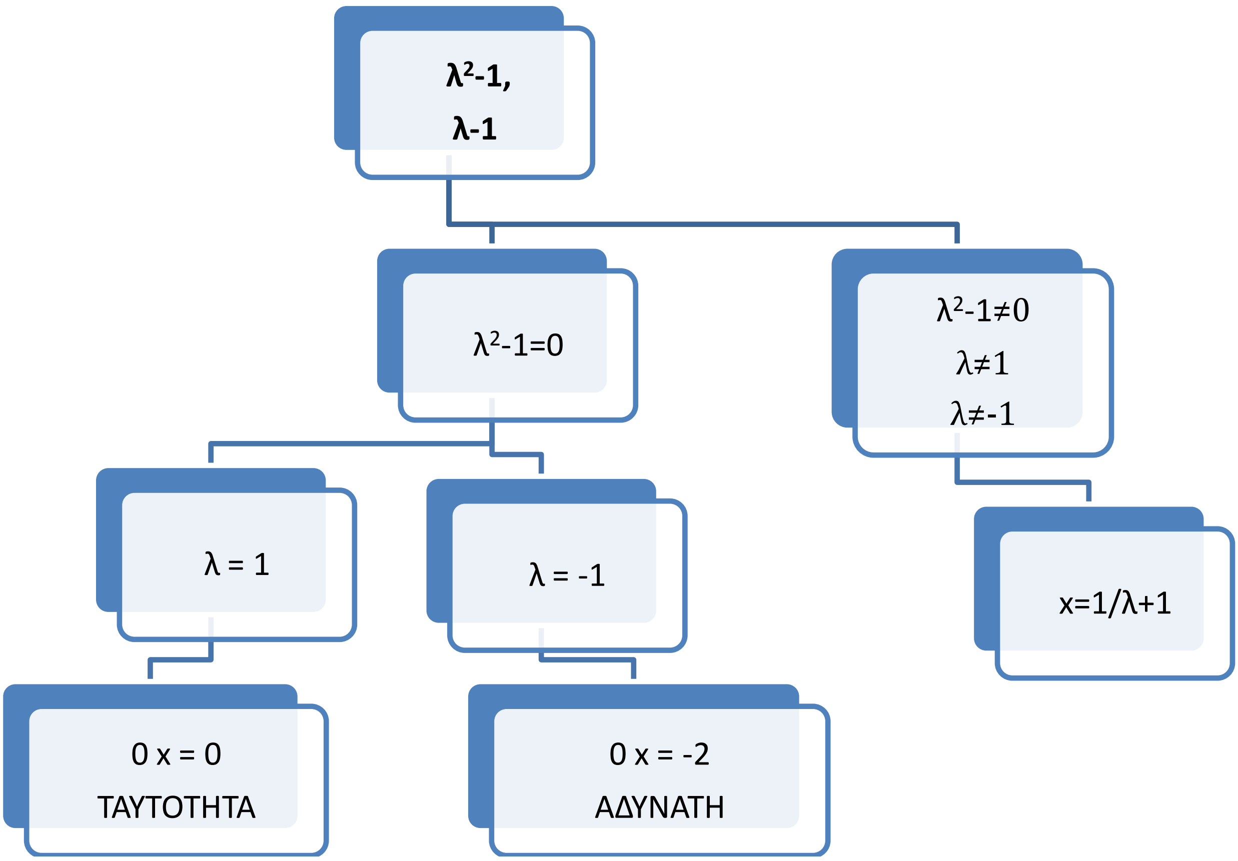
3ο ΒΗΜΑ: Αν $\lambda^2\text{-}1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1, -1$, τότε:

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

- Η εξίσωση έχει μία λύση $x = \frac{1}{\lambda + 1}$ αν $\lambda \neq 1$ **και -1.**
- Είναι **ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ** όταν $\lambda = 1$
- Είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ** όταν $\lambda = -1$

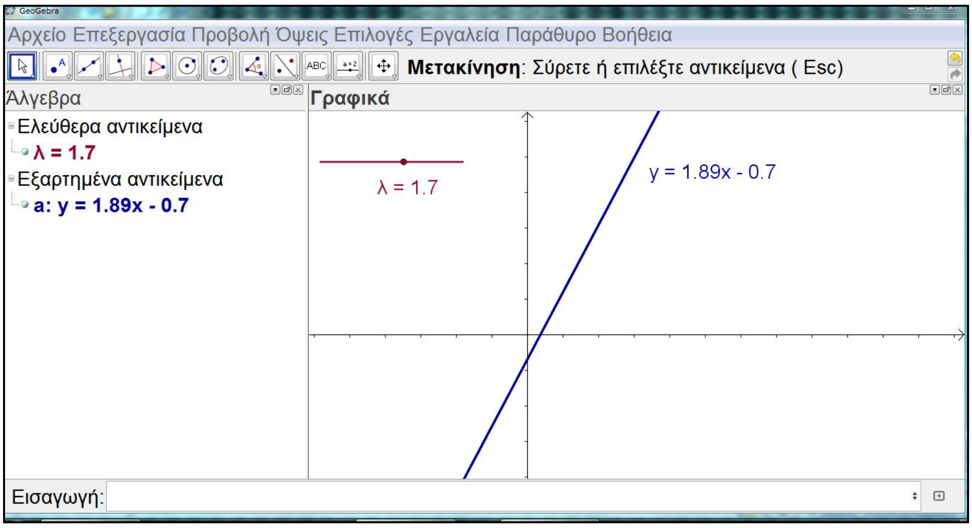
Και για να θυμηθούμε το δενδροδιάγραμμα που χρησιμοποιήσαμε για να γράψουμε τον αλγόριθμο:



Ποια μπορεί να είναι η γεωμετρική σημασία όλων αυτών των αποτελεσμάτων?

Για να το δούμε αυτό πρέπει να πάμε στο Geogebra:

Ανοίξτε λοιπόν το Geogebra, τοποθετήστε ένα δρομέα στο περιβάλλον. Αυτός παίζει το ρόλο της παραμέτρου λ στην εξίσωση : **$(\lambda^2\text{-}1)\ x = \lambda – 1$**



Στο πεδίο της Εισαγωγής γράψτε την εξίσωση σε μορφή συνάρτησης.

y = (λ^2 – 1) * x – λ + 1 (**)

ΠΡΕΠΕΙ να γνωρίζω από το γυμνάσιο ότι: η αρχική εξίσωση έχει ρίζες στα σημεία που η ευθεία (**) τέμνει τον άξονα x.

Μετακινώντας τον δρομέα λ θα δείτε τα αποτελέσματα που βρήκατε λύνοντας την εξίσωση:

Αν ο δρομέας λ είναι ίσος με – 1, τότε, η γραφική παράσταση της ευθείας (**) είναι παράλληλη στον άξονα x, πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει ρίζα ή δεν τέμνει τον άξονα x ή είναι παράλληλη στον άξονα x)

Αν ο δρομέας λ είναι ίσος με 1, τότε η γραφική παράσταση της ευθείας (**) ταυτίζεται με τον άξονα x.

Σε κάθε άλλη περίπτωση η ευθεία (**) τέμνει τον άξονα x, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πάντα λύση.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΑΝΑΚΛΗΣΗ ΓΝΩΣΕΩΝ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

- $s \cdot x = 34 \Leftrightarrow$

  (άγνωστος x)

- $v = v_0 + a\,t \Leftrightarrow$

  (άγνωστος t)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Λύση παραμετρικής εξίσωσης :

Μια παραμετρική εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού, α x = β, είναι μια εξίσωση της οποίας οι συντελεστές α και β δεν είναι καθαροί αριθμοί αλλά περιέχουν μια δευτερεύουσα μεταβλητή. Για να την λύσουμε ακολουθούμε τον αλγόριθμο που έχουμε γράψει. Προφανώς το πρόβλημα εντοπίζετε στην διερεύνηση του συντελεστή α για τις διαφορετικές της δευτερεύουσας μεταβλητής.

Παράδειγμα: Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση : $(\lambda^2-1)\,x - \lambda + 1 = 0$ (σχολικό σελ. 80)

$1^{ο}$ ΒΗΜΑ: Με αλγεβρικές αναγωγές οδηγώ την αρχική στην μορφή α x = β.

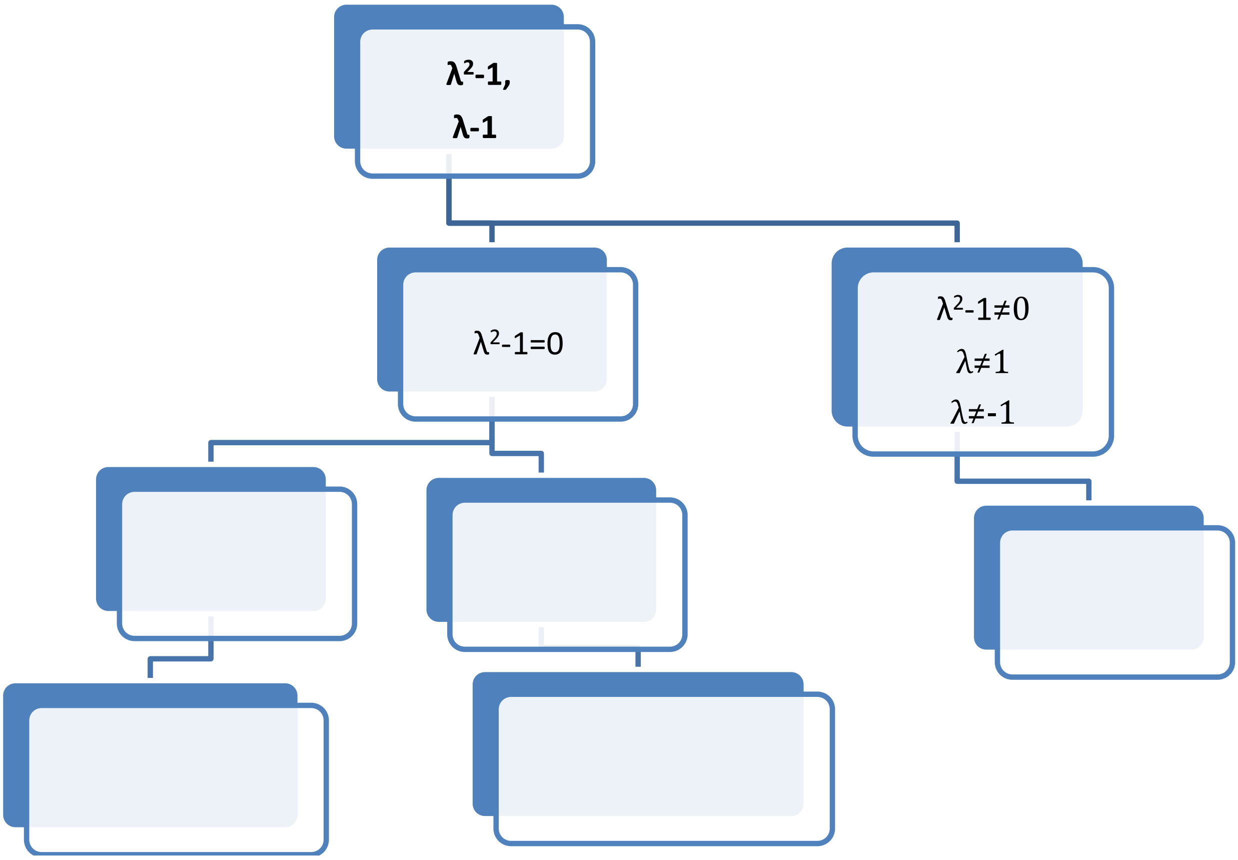
$2^{ο}$ ΒΗΜΑ: Ακολουθώ τον αλγόριθμο

$3^{ο}$ ΒΗΜΑ:

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

- Η εξίσωση έχει μία λύση όταν
- Είναι **ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ** όταν
- Είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ** όταν

Και για να θυμηθούμε το δενδροδιάγραμμα που χρησιμοποιήσαμε για να γράψουμε τον αλγόριθμο:

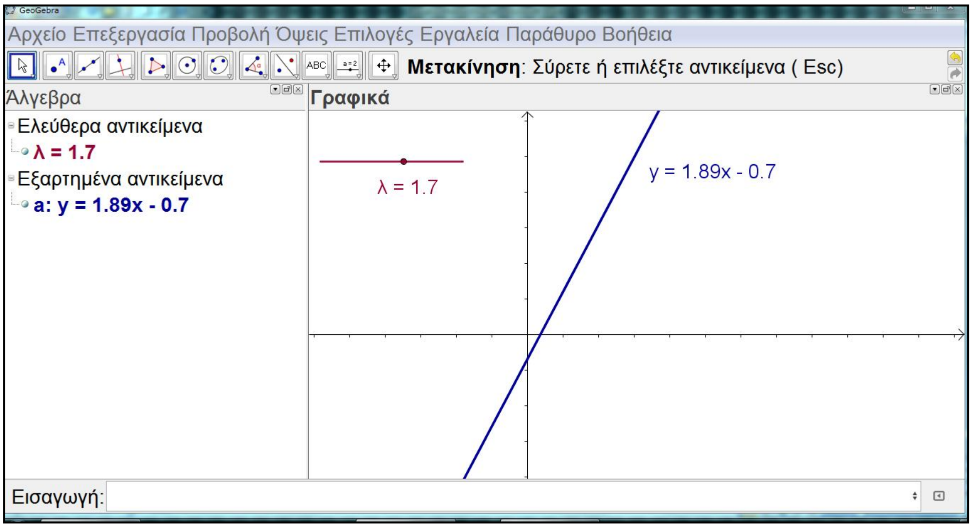

λ²-1,
λ-1
λ²-1=0
λ²-1≠0
λ≠1
λ≠-1

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Ποια μπορεί να είναι η γεωμετρική σημασία όλων αυτών των αποτελεσμάτων?

Για να το δούμε αυτό πρέπει να πάμε στο Geogebra:

Ανοίξτε λοιπόν το Geogebra, τοποθετήστε ένα δρομέα στο περιβάλλον. Αυτός παίζει το ρόλο της παραμέτρου λ στην εξίσωση : $(\lambda^2-1)\ x = \lambda - 1$



Στο πεδίο της Εισαγωγής γράψτε την εξίσωση σε μορφή συνάρτησης.

y = (λ^2 – 1) * x – λ + 1 (**)

ΠΡΕΠΕΙ να γνωρίζω από το γυμνάσιο ότι: η αρχική εξίσωση έχει ρίζες στα σημεία που η ευθεία (**) τέμνει τον άξονα x.

Μετακινώντας τον δρομέα λ θα δείτε τα αποτελέσματα που βρήκατε λύνοντας την εξίσωση:

Αν ο δρομέας λ είναι ίσος με – 1,

Αν ο δρομέας λ είναι ίσος με 1,

Σε κάθε άλλη περίπτωση η ευθεία (**) τέμνει τον άξονα x, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πάντα λύση.

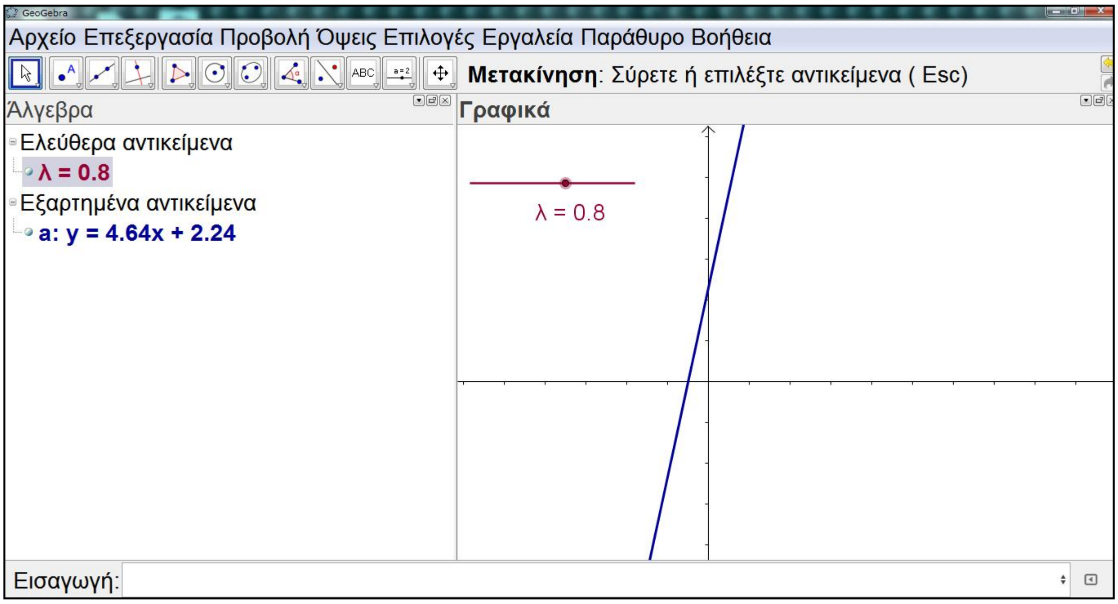
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε το αντίστροφο: Περάστε στο πεδίο σχεδιασμού του Geogebra ένα δρομέα λ . Εισάγεται στο πεδίο Εισαγωγής την συνάρτηση

y = λ^2* x + 2*λ + λ^2+ 4*x

Μετακινώντας τον δρομέα θα δείτε τις διάφορες θέσεις της ευθείας. Πως θα αιτιολογούσατε την συμπεριφορά της με τα αλγεβρικά αποτελέσματα που θα πάρετε αν επιλύσετε την αντίστοιχη εξίσωση;

$$\lambda^2 x + 2\lambda + \lambda^2 + 4x = 0$$



<u>Εργασία:</u> Να γίνει η άσκηση 3Α του βιβλίου και οι ασκ. 147/8/9 και 151 από σημειώσεις, δες [6].

3η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΙ: Παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού (Εμβάθυνση).

Επίλυση προηγουμένων ασκήσεων

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΡΓΑΣΙΑ:</u> Να γίνουν οι ασκήσεις 160 και 161 από σημειώσεις, δες [6].

Για τν επίλυση της άσκησης 160, υπενθυμίζω την ταυτότητα Euler, σελ. 48 σχολικού βιβλίου.

4η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΙ: Επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $|x| = \theta,\ \theta \geq 0,\ x = \pm\theta$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $|x| = 3$

2. $|x| = -8$

3. $|x - 1| = 5$

4. $\big|\, 3 - |x + 1| \,\big| = 2$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $|p(x)| = |q(x)|$ τότε $p(x) = \pm |q(x)|$ ή $\pm q(x)$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $|x - 4| = |x|$

2. $\big|3 - |x|\big| = |x - 1|$

3. $|x(x - 3)| + |x| = 0$

4. $|x - 1| + |x| = 4$

5. $x^2 = -8$

6. $x^2 = 34$

7. $x^3 + 27 =$

Εργασία: **Οι ασκήσεις του βιβλίου, Ομάδα Α και Ομάδα Β.**
Οι ασκήσεις του φυλλαδίου 153/4/5/6/7, δες [6].