ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 3.2 – **<u>Εξισώσεις 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ</u>**

i. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

1. Να αποκτήσουν συνείδηση της ιστορικής διαδρομής της λύσης της εξίσωσης.
2. Να γνωρίζουν ότι το αλγεβρικό πρόβλημα πιστοποιεί την μαθηματική του αξία μέσα από την γεωμετρία.
3. Να γνωρίσουν την ποιότητα του αλγεβρικού υπολογισμού ο οποίος για πρώτη φορά εκφράζεται ανάγλυφα από την μορφή των λύσεων των εξισώσεων 2ου βαθμού καθώς και από τους τύπους του Viete.
4. Να διερευνούν την διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης 2ου βαθμού
5. Να κατανοήσουν τον αλγοριθμικό χαρακτήρα των λύσεων μιας εξίσωσης.
6. Να μπορούν να διαβάσουν έναν στοιχειώδη αλγόριθμο επίλυσης εξίσωσης.
7. Να μπορούν να λύσουν παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού και να είναι σε θέση να αναπαραστήσουν στο Geogebra το αλγεβρικό αποτέλεσμα.
8. Να προσδιορίζουν τους τύπους του Viete και να εκτελούν τις αντίστοιχες εφαρμογές.
9. Να μπορούν να επιλύουν σύνθετες μορφές εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ii. ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: Καθοδήγηση – ερωτήσεις

iii. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ: Πολλαπλή (Μετωπική-παραγωγική-αναγωγική-επαγωγική κλπ)

iv. ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ: Πίνακας, Η/Υ (λογισμικό: Geogebra, Maple)

v. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ Διάρκειας 5 (6) ωρών διδασκαλίας.

vi. ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Αφού εξαντληθεί το τεχνικό μέρος στις δύο πρώτες παραγράφους με τον τύπο επίλυσης της εξίσωσης καθώς και τους τύπους του Viete, θα δοθεί έμφαση στις παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού καθώς και στην επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Το κύριο βάρος βρίσκεται στην ανάπτυξη της τελευταίας διδακτικής ώρας με την πολυμορφία των ασκήσεων και το ιδιαίτερο ιστορικό σημείωμα. Μετά από ένα σύντομο πέρασμα των ιστορικών βημάτων για την επίλυση της εξίσωσης, θα σταθούμε στην μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων η οποία θα λέγαμε ότι περιγράφεται για πρώτη φορά στο βαβυλωνιακό κείμενο BM 13901 (περ. 1800 π.Χ), δες [20]. Το κείμενο αυτό είναι παλαιότερο από αυτό που ισχυρίζεται το βιβλίο ότι αποτελεί την πρώτη γραφή συμπλήρωσης

τετραγώνων, δες σελ. 98 «Μέθοδος Ινδών». Ξεκινώντας από αυτό κείμενο θα ζητήσουμε σαν εργασία από τους μαθητές την γεωμετρική αναπαράσταση της περίπτωσης του προβλήματος του BM 13901.
Στη συνέχεια αναπτύσοντας πλήρως την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων θα συνδέσουμε την λύση με την αλγοριθμική της υπόσταση όπως έγινε και με την εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού. Στη συνέχεια, και σε επίπεδο ομίλων, περνώντας από τον Διόφαντο και τον Ευκλείδη, θα σταματήσουμε στην εργασία του Viete η οποία θα ολοκληρωθεί με τις εργασίες Newton-Lagrange. Το κομμάτι αυτό δεν αναφέρεται στο παρών Σχεδιο.

Τρείς εργασίες θα δοθούν στους μαθητές:

1) Ιστορική παρουσίαση της μεθόδου με έμφαση στο BM 13901 και στο έργο του Διόφαντου.
2) Γεωμετρική αναπαράσταση της λύσης BM 13901.
3) Για τον όμιλο: Συνεργασία μαθητών Α και Β Λυκείου. Γεωμετρική σημασία της διακρίνουσας. Θεωρούμε ότι είναι το σημαντικότερο μαθηματικό αποτέλεσμα στην Α Λυκείου.
4) Για τον όμιλο: Συνεργασία μαθητών Α και Β Λυκείου. Οι συμμετρικές μορφές του Viete έχουν παρουσιασθεί από μαθητές μας στα Euromath 2012. Η εργασία θα είναι μια εισαγωγή στην μέθοδο Lagrange.

Βιβλιογραφία:

1. **Maple 11** Introductory Programming Guide, MapleSoft 2007.
2. **MATH Seconde,** Hachette Education, 2000,2005,2006.
3. *Σχολικό Βιβλίο* Α Λυκείου.
4. **Berggren J.L.** *Episodes in the mathematics of Medieval Islam*, Springer New York, 1986.
5. **Chouchoud S.**, *Mathematiques egyptiennes*, Margnard, Paris, 1960.
6. **O'Connor J.J. and Robertson E.F**. *δες*
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sridhara.html
7. **Descartes R**., *Discours de la Methode*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1979.
8. **Descartes R**., *La Geometrie*, Editions de l' AREFPPI, Paris, 1984.
9. **Djebbar A**., *Une histoire de la science arabe*, Seuil, Paris, 2001.
10. **Εξαρχάκου Θ**., *Ιστορία των μαθηματικών*, τόμ. Α, 1997.
11. **Flegg G.**, *Numbers, their History and Meaning*, Dover, New York, 2002.
12. **Ifrah G.**, *Histoire universelle des chiffres*, T.2, Robert Laffont, Paris, 1994.
13. **IREM**, *Histoires de problemes*, histoires des mathematiques, Ellipses, Paris, 1993.
14. **Θωμαίδης Γ.,** *Εξισώσεις και Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού στα «Αριθμητικά» του Διοφάντου*, Ζήτη, 2011.
15. **Katz V.J.**, *A History of Mathematics*, brief Edition, Pearson Addison Wesley, New York, 2004.
16. **Mahammed N.**, *Histoire des equations algebriques*, Diderot-Multimedia, Paris, 1998.

17. **Sesiano J.**, *Une introduction a l'histoire de l' algebra*, Presses polytechniques et romandes, Lausanne, 1999.
18. **Smith D.E.**, *History of Mathematics*, T2, Dover New York, 1958.
19. **Σταμάτης Ε.**, *Διοφάντου Αριθμητικά*, ΟΕΔΒ, 1963.
20. **Taton R.,** *La science Moderne*, T.2, PUF, Quadrige, Paris, 1969.
21. **Thureau-Dangin F.**, *L' equation du second degre dans la mathematique babylonienne d' apres une tablette inedit du British Museum*. Revue d' Assyriologie, T. 33, 1936.
22. **Van der Warden B.L.**, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin, 1983.
23. **Youschkervitch A.P.**, *Les mathematiques Arabes*, Vrin, Paris 1976.
24. **Λυγάτσικας Ζ**. Ασκήσεις Άλγεβρας Α Λυκείου, Βαρβάκειο Λύκειο, 2012.

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΣ: Η κατανόηση της αλγοριθμικής διαδικασίας για την λύση της εξίσωσης 2ου βαθμού.

ΑΝΑΚΛΗΣΗ ΓΝΩΣΕΩΝ

Προαπαιτούμενα

Θα πρέπει να γνωρίζετε τα αναπτύγματα:

- $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$
- $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
- **ΠΡΟΣΟΧΗ: Γενικά δεν ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ για τυχαία α και β!!!!! Πότε ισχύει αυτό?**

Είδαμε στην Γ τάξη του Γυμνασίου την μέθοδο «Brâhmasphutasiddhânt» του Brahmagupta, σελ. 94:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad ax^2+bx=-c \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2x^2+4abx=-4ac \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac \\ &\Leftrightarrow \quad (2ax+b)^2=b^2-4ac \\ &\Leftrightarrow \quad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Την ποσότητα $b^2 - 4ac$ την ονομάσαμε **διακρίνουσα και θα την συμβολίζουμε με το ελληνικό γράμμα $\Delta = b^2 - 4ac$**.

Η διακρίνουσα παίζει έναν σημαντικότατο ρόλο στον χαρακτηρισμό των ριζών: Αν προσέξατε στο 5^ο^ βήμα του αλγορίθμου Brahmagupta, χρειάσθηκε η διακρίνουσα να περάσει κάτω από μια ρίζα, αλλά, είναι θετική αυτή η ποσότητα? Όχι πάντα: και ανάλογα με το πρόσημο της έχουμε και την διαφορετική ποιότητα των ριζών!

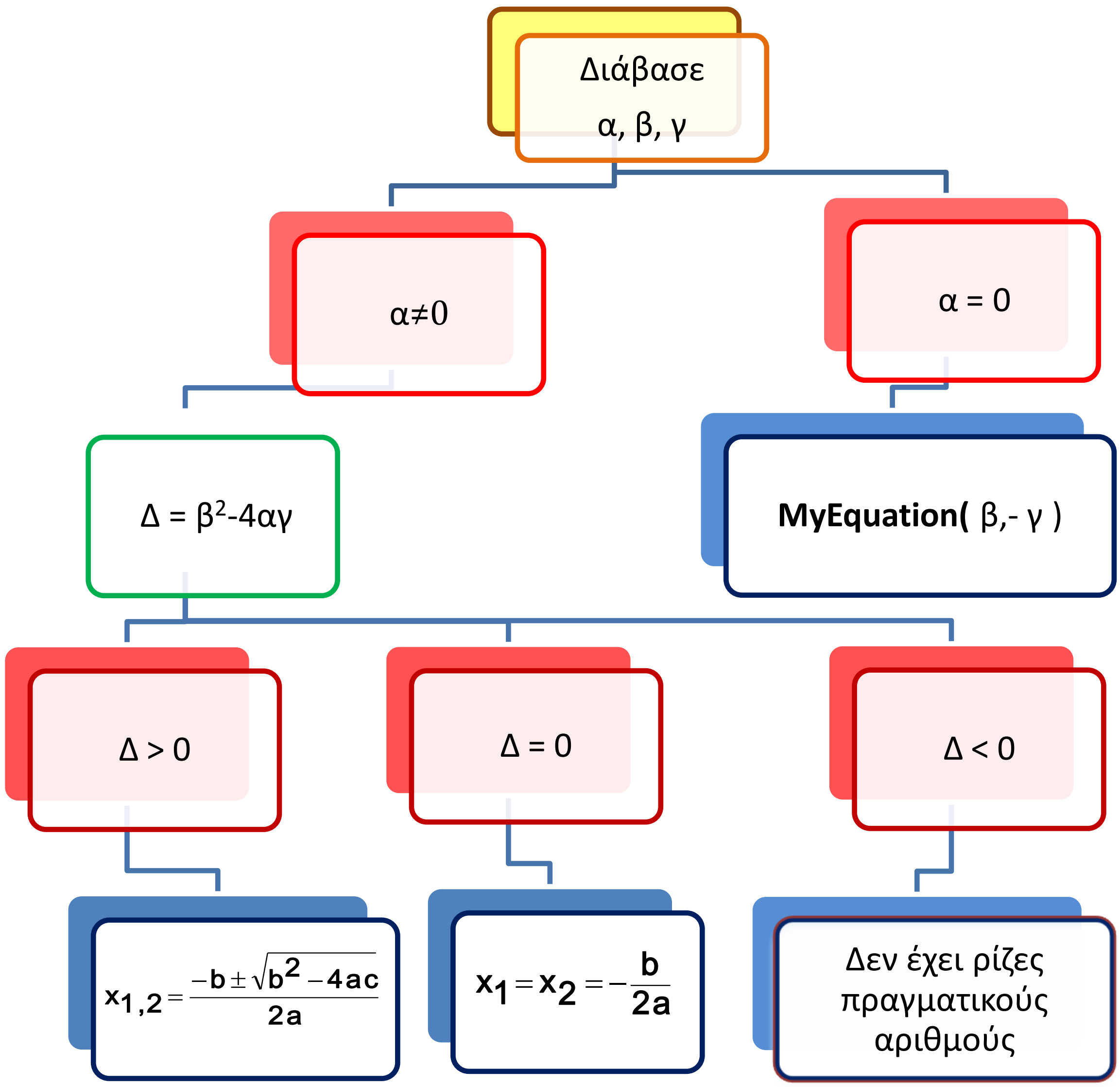
- Αν **Δ > 0**, τότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Αν **Δ = 0**, τότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες ίσες: $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$
- Αν **Δ < 0**, τότε ΔΕΝ έχουμε πραγματικές ρίζες αφού δεν μπορούμε να ορίσουμε στο $\mathbb{R}$ ρίζα με αρνητικό υπόριζο. Τέτοιο σύνολο υπάρχει και είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που θα τους δούμε στην Τρίτη Λυκείου.

Το γιατί η εξίσωσή μας έχει το πολύ 2 ρίζες, δεν θα το μάθουμε αμέσως. Είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτέλεσματα της άλγεβρας και λέγετε «Θεμελειώδες Θεώρημα» της άλγεβρας.

Η περιπτοσολογία που αφορά στην διακρίνουσα, καθώς και όλη η λύση, θα μας οδηγήσει σε αλγοριθμικό διάγραμμα, όπως στην περίπτωση της εξίσωσης 1ου βαθμού. Το διάγραμμα αυτό θα γίνει ο σκελετός για την κατασκευή του αλγορίθμου επίλυσης.

Για τον αλγόριθμο θα χρειασθούμε μια εξίσωση 2ου βαθμού της μορφής

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ και } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$



Παρατηρείστε ότι ο αλγόριθμος δεν μπορεί να αποφύγει κακόβουλες εισαγωγές δεδομένων όπως την περίπτωση που ο συντελεστής α μπορεί να είναι ίσος με 0! Στην περίπτωση αυτή, αν δηλαδή a=0, θα εισάγουμε τον αλγόριθμο που κατασκευάσαμε στην εξίσωση πρώτου βαθμού «MyEquation».

Τώρα μπορούμε να εξειδικεύσουμε το διάγραμμα στο MAPLE:

```
proc(a, b, c)
    local delta;
    if a = 0 then
        MyEquation1 (b, c)
    else
        delta := b^2 − 4*a*c;
        if delta < 0 then
            print(Αδύνατη*Στο*R)
        else
            [1/2*( − b + sqrt(delta))/a, 1/2*( − b − sqrt(delta))
            /a]
        end if
    end if
end proc
```

Και να τα αποτελέσματα:

$$MyEquation2\left(1,\ 1, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right]$$

$$MyEquation2(0,\ 0,\ 1)$$

$$Αδύνατη$$

$$MyEquation2(1,\ 0, -3)$$

$$\left[\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right]$$

$$MyEquation2(-2,\ 4,\ 1)$$

$$\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{6},\ 1+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right]$$

$$MyEquation2(2,\ 2,\ 2)$$

$$Αδύνατη\ Στο\ R$$

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 (1^η Διδακτική)

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

Τα α, β και γ ονομάζονται συντελεστές. Τον α θα τον ονομάζουμε <u>μεγιστοβάθμιο συντελεστή</u> και τον γ <u>σταθερό όρο ή μηδενικό συντελεστή</u>.

1) Παραδείγματα εξισώσεων στη γενική μορφή. Άγνωστος ο x:

1	$4x^2+5x+2=0$	α =	β =	γ =
2	$5x^2=0$	α =	β =	γ =
3	$vx^2 - t\,x + 3 = 0$	α =	β =	γ =

2) Να αναγάγετε τις παρακάτω εξισώσεις στην γενική μορφή:

1	$x^2 - 34\,x = 78$		α=	β =	γ =
2	$(2x+3)(4x-1)= 5x + 2$		α=	β =	γ =
3	$\frac{3x+4}{x}=\frac{6}{2x}$		α=	β =	γ =

3) <u>**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ**</u> Αν **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$**, να βρείτε την διακρίνουσα των παρακάτω τριωνύμων που έχουν μεταβλητή το x.

1	$x^2 - 3x = 3$	α=	β =	γ =	Δ =
2	$\lambda x^2 = 1 - 3(1 + x^2)$	α=	β =	γ =	Δ =
3	$\frac{v^3+t\cdot x}{R_1+2}=\frac{6\cdot t\cdot \mu}{x}$	α=	β =	γ =	Δ =

Ερώτηση: Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο στο 2^ο ερώτημα έχει διπλή ρίζα?

Ασκήσεις: Ομάδα Α: ασκ. 3, 8 σελ. 93/4, Να λυθούν οι 2 και 3 από το παράδειγμα.

ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $2^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 3.2 – **<u>Εξισώσεις $2^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ: Άθροισμα-Γινόμενο Ριζών.</u>**

vii. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

10. Να μπορούν να προσδιορίσουν τους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών εξίσωσης 2ου βαθμού.
11. Να μπορούν να κατασκευάσουν μια εξίσωση γνωρίζοντας το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.
12. Να διερευνούν την ποιότητα των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους τύπους του Viete.

viii. ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: Καθοδήγηση – ερωτήσεις

ix. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ: Πολλαπλή (Μετωπική-παραγωγική-αναγωγική-επαγωγική κλπ)

x. ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ: Πίνακας, Η/Υ (λογισμικό: Maple)

xi. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ Διάρκειας 1 διδακτικής ώρας.

xii. Λέξεις Κλειδιά: Άθροισμα και γινόμενο ριζών εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού, συμμετρικές μορφές Viete.

xiii. *Βιβλιογραφία:*

25. **MATH Seconde,** Hachette Education, 2000,2005,2006.
26. *Σχολικό Βιβλίο* Α Λυκείου.

ΑΝΑΚΛΗΣΗ

Θα λυθούν οι ασκήσεις:

1) $\lambda x^2 = 1 - 3(1 + x^2)$ αν $\lambda < -3$
2) Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $x^2 + (\sqrt{2} - 1)\cdot x - \sqrt{2} = 0$

Ας παρατηρήσουμε λίγο το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της δεύτερης εξίσωσης: παρατηρούμε ότι το άθροισμα και το γινόμενο εμφανίζονται σαν συντελεστές στον τύπο της εξίσωσης. Για πρώτη φορά ο Viete τον 16^o αιώνα ανακάλυψε την ιδιότητα αυτή και βρήκε τους γνωστούς τύπους αλλά, για την περίπτωση των θετικών ριζών. Μετέπειτα, τον 18^o αιώνα, ο Charles Hutton είναι ο πρώτος μαθηματικός που καθιέρωσε τους τύπους για όλες τις ρίζες πολυωνύμων, ισχυριζόμενος ότι ο Albert Girard τον 17^o αιώνα κατανόησε πρώτος το μέγεθος της ανακάλυψης των συμμετρικών μορφών στη θεωρία των πολυωνυμικών εξισώσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ (Καθοδηγούμενη εξάσκηση)

Η εύρεση των τύπων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1) Με την ανάλυση του τριωνύμου σε γινόμενο παραγόντων
2) προσθέτοντας και πολ/ζοντας τους τύπους των ριζών που βρήκαμε στο προηγούμενο μάθημα.

Εδώ θα δουλέψουμε με τον δεύτερο τρόπο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Σκοπός είναι να ανακαλύψουν τους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών εξίσωσης 2ου βαθμού. Η δραστηριότητα θα γίνει στον Πίνακα.

Δεδομένα: **$ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και $a,b,c \in \mathbb{R}$, υποθέτουμε ότι $\Delta \geq 0$**

Οι δύο ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Τότε:

$$\boxed{S := x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}}$$

και

$$P := x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Οι τύποι του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών ονομάζονται τύποι του Viete.

Αντίστροφα: Αν μας δίνοντε το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού της οποίας οι δύο αυτοί αριθμοί είναι ρίζες;

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση έχει γενική μορφή

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ με } a \neq 0$$

τότε :

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \mathbf{x^2-Sx+P=0}$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να βρίσκουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών εξίσωσης καθώς και να εκτελούν την αντίστροφή διαδικασία: αν γνωρίζουν το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών να σχηματίζουν την εξίσωση η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς αυτούς.

Η εξίσωση	Το άθροισμα S	Το γινόμενο P
$2x^2 + 3x - 4 = 0$	-3/2	- 2
$x^2 - 5 = 0$	0	-5

<u>Το αντίστροφο πρόβλημα: Το πρόβλημα του Διόφαντου</u>. Στο πρώτο βιβλίο των «Αριθμητικών», πρόβλημα 27 ο Διόφαντος ($3\text{-}4^{ος}$ αιώνας μ.Χ) διατύπωσε το εξής πρόβλημα:

Να βρεθούν δύο αριθμοί οι οποίοι να έχουν άθροισμα και γινόμενο δεδομένους αριθμούς.

Για παράδειγμα:

Υπάρχουν αριθμοί που έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο – 5?

$x^2 - 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να μπορούν να βρίσκουν ιδιότητες των συντελεστών ή των ριζών από τις συμμετρικές μορφές του Viete.

1) Όταν η μια εκ των δύο ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι ο 2 και το άθροισμα των ριζών είναι 4, τότε η διακρίνουσα είναι 0?
Απάντηση: Ναι, γιατί $x + y = 4$ αν $x = 2$ τότε $y = 2$. Συνεπώς, η διακρίνουσα είναι 0.

2) Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β και γ, $\alpha \neq 0$, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ να είναι:
1) αντίθετοι αριθμοί
2) αντίστροφοι αριθμοί
Απάντηση: Πρώτα πρέπει $\Delta \geq 0$: αντίθετοι αν $\beta = 0$, αντίστροφοι αν $\alpha = \gamma$.

■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Άσκηση 10 Ομάδα Α σελ. 96 σχολικό.
- Άσκηση 184, 186 φυλλάδιο, [24].
- Υπάρχει διψήφιος αριθμός n έτσι ώστε
  - **i.** Το άθροισμα των ψηφίων να είναι **13** και
  - **ii.** αντιστρέφοντας την διάταξη των ψηφίων να πάρουμε έναν αριθμό m έτσι ώστε το γινόμενο με τον n να είναι τέτοιο ώστε: **n x m = 4930**;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δεδομένα: $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και $a,b,c \in \mathbb{R}$, υποθέτουμε ότι $\Delta \geq 0$

Οι δύο ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$S := x_1 + x_2 \quad = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \qquad \ldots$$

$$P := x_1 \cdot x_2 \quad = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \qquad \ldots$$

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την αρχική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού σε μια μορφή ισοδύναμη με την βοήθεια των τύπων του Viete;

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών εξίσωσης καθώς και να εκτελέσουμε την αντίστροφή διαδικασία: αν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών να σχηματίσουμε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς αυτούς.

Η εξίσωση: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$	**Το άθροισμα $S=-\beta/\alpha$**	**Το γινόμενο $P=\gamma/\alpha$**
$2x^2 + 3x - 4 = 0$		
$x^2 - 5 = 0$		

<u>Το αντίστροφο πρόβλημα - πρόβλημα του Διόφαντου</u>. Στο πρώτο βιβλίο των «Αριθμητικών», πρόβλημα 27 ο Διόφαντος (3-$4^{ος}$ αιώνας μ.Χ) διατύπωσε το εξής πρόβλημα:

Να βρεθούν δύο αριθμοί οι οποίοι να έχουν άθροισμα και γινόμενο δεδομένους αριθμούς.

Για παράδειγμα:
Υπάρχουν αριθμοί που έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο – 5? Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να μπορούμε να βρούμε ιδιότητες των συντελεστών ή των ριζών από τις συμμετρικές μορφές του Viete.

1) Όταν η μια εκ των δύο ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι ο 2 και το άθροισμα των ριζών είναι 4, τότε η διακρίνουσα είναι 0?

2) Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β και γ, $α \neq 0$, έτσι ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$ να είναι:
   1) αντίθετοι αριθμοί
   2) αντίστροφοι αριθμοί

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Άσκηση 10 Ομάδα Α σελ. 96 σχολικό.
- Άσκηση 184, 186 φυλλάδιο, [24].
- Υπάρχει διψήφιος αριθμός n έτσι ώστε
  - **iii.** Το άθροισμα των ψηφίων να είναι **13** και
  - **iv.** αντιστρέφοντας την διάταξη των ψηφίων να πάρουμε έναν αριθμό m έτσι ώστε το γινόμενο με τον n να είναι τέτοιο ώστε: **n x m = 4930**;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να αναγάγουμε συνθετότερα προβλήματα σε εξίσωσης 2ου βαθμού, μέσω των τύπων Viete.
Απαιτεί δεξιότητες και για τον λόγο αυτό θα επιστρέψουν το φύλλο εργασίας για αξιολόγηση, στο πλαίσιο του συνεχούς ελέγχου.
(θα ήταν σκόπιμο να διδαχθεί μια δδακτική ώρα)

Υπάρχει διψήφιος αριθμός n έτσι ώστε

i. Το άθροισμα των ψηφίων να είναι **13** και
ii. αντιστρέφοντας την διάταξη των ψηφίων να πάρουμε έναν αριθμό m έτσι ώστε το γινόμενο με τον n να είναι τέτοιο ώστε: **n x m = 4930**;

Διερεύνηση:

Αν ο αριθμός 4930 αναλύεται σε $4930 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$, μπορείτε να βρείτε τον ζητούμενο αριθμό;
Στον διπλανό βλέπετε τον πίνακα των γινομένων των παραγόντων του 4930.

	2	**5**	**17**	**29**
2		10	34	58
5	10		85	145
17	34	85		493
29	58	145	493	

Γενίκευση:

Αν n = xy, όπου x,y φυσικοί < 10 και διάφοροι του 0. Τότε:

$$xy + yx = 143 \text{ (γιατί?)}$$
$$xy \cdot yx = 4930$$

ή αν $\rho_1 = xy$ και $\rho_2 = yx$,

$$\rho_1 + \rho_2 = 143$$
$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 4930$$

Άρα, αν υπάρχει αριθμος n που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος, τότε πρέπει οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 να είναι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 143x + 4930 = 0$. Οι δύο ρίζες της είναι 58 και 85. Άρα, n = 58 ή 85.

■

ΟΝΟΜ/ΜΟ:

Σκοπός της δραστηριότητας είναι να αναγάγουμε συνθετότερα προβλήματα σε εξίσωσης 2ου βαθμού, μέσω των τύπων Viete.

Να επιστραφεί το φύλλο εργασίας.

Υπάρχει διψήφιος αριθμός n έτσι ώστε

v. Το άθροισμα των ψηφίων να είναι **13** και

vi. αντιστρέφοντας την διάταξη των ψηφίων να πάρουμε έναν αριθμό m έτσι ώστε το γινόμενο με τον n να είναι τέτοιο ώστε: **n x m = 4930**;

Παρατήρηση 1: Αν ο αριθμός 4930 αναλυόμενος σε γινόμενο πρώτων παργόντων δίνει $4930 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$, μπορείτε να βρείτε τον αριθμό;

Ο αριθμός n μπορεί να είναι ο ………. γιατί …

	2	**5**	**17**	**29**
2		10	34	58
5	10		85	145
17	34	85		493
29	58	145	493	

Παρατήρηση 2: Σκοπός τώρα είναι να αλγεβρικοποιήσουμε το πρόβλημα.

- Ποια κατάλληλη, για την περίπτωσή μας, μορφή θα δίνατε στον αριθμό n?

- Αφού προσδιορίστε το άθροισμα και το γινόμενο των δύο αριθμών n και m, σχηματίστε την εξίσωση 2ου βαθμού της οποίας οι αριθμοί είναι ρίζες.

- Κατασκευάστε ένα δικό σας πρόβλημα στο πνεύμα της προηγούμενης δραστηριότητας.

$3^{η}$ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΙ: Να μπορούν να αναγάγουν μια εξίσωση σε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2 ($2^{η}$ Διδακτική)

1) Να λυθεί η εξίσωση: $(2x-1)^2-\left|\frac{1}{2}-x\right|-\frac{1}{2}=0$

2) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x-1}{x-2}+\frac{x-2}{2x-1}-\frac{5}{2}=0$

3) Να λυθεί η εξίσωση: $4x^4+11x^2-3=0$

Αξιολόγηση:

206. Έστω η διτετράγωνος εξίσωση: (1) : $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) η (1) έχει τέσσερες πραγματικές και άνισες ρίζες, όταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$ και $\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$.

(β) η (1) έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες, αν $\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$.

(γ) η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $-\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$ και $\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$ ή $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Άσκηση 14, 15 (i) Ομάδα Α σελ. 94, άσκηση 5 Ομάδα Β σελ. 95. Ασκηση 208, 210 από σημειώσεις, [24].

4η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

Επανάληψη

Να λυθούν οι ασκήσεις:

14 (ii), Ομάδα Α σελ. 94,
άσκηση 5 Ομάδα Β σελ. 95.
Ασκηση 208, 210 από σημειώσεις, [24].

Αξιολόγηση:

177. Ρίχνουμε τρείς φορές ένα ζάρι, με έξι αριθμημένες πλευρές 1,2,3,4,5,6, και σημειώνουμε τα αποτελέσματα: a την πρώτη φορά, b την δεύτερη και c την τρίτη. Έτσι έχουμε ένα ενδεχόμενο που το σημειώνουμε με (a, b, c).

(α΄) Βρείτε τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχομένων του πειράματος.

(β΄) Αν έχουμε σε μία ρίψη το ενδεχόμενο (a, b, c), τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ με άγνωστο τον x.
Για παράδειγμα: αν έχουμε $(2, 5, 6)$ τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = 2x^2 + 5x + 6 = 0$.

i. Το 0 μπορεί να είναι ρίζα της εξίσωσης $p(x) = 0$;

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ δεν δέχεται καμμία πραγματική ρίζα θετική ή μηδέν.

iii. Υπάρχουν a, b, c έτσι ώστε το -1 να είναι ρίζα της $p(x) = ax^2+bx+c = 0$; Ποιές είναι αυτές οι τιμές των a, b, c;
Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:A : *το* -1 *είναι ρίζα της εξίσωσης*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Άσκηση φυλλάδιο 168, 170, 173, 178, 186, 192, από [24].

5η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

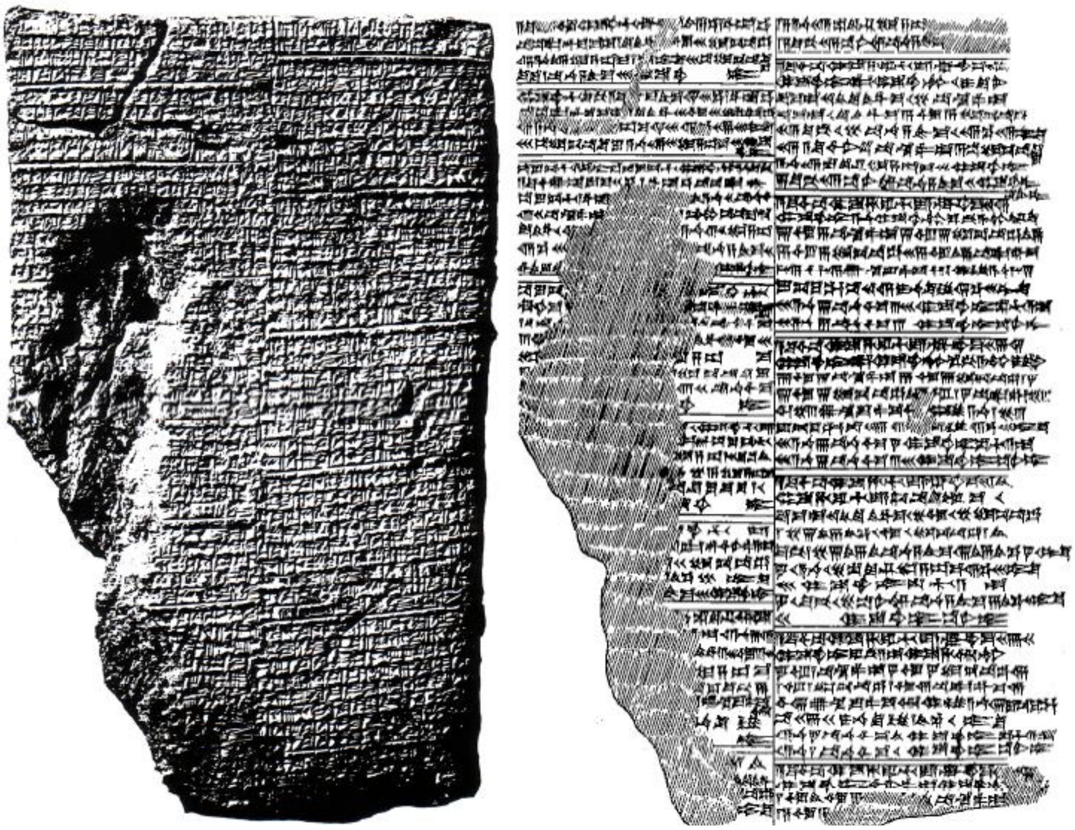
ΣΤΟΧΟΙ: Αξιολόγηση της αλγεβρικής και γεωμετρικής μεθόδου επίλυσης εξίσωσης δευτέρου βαθμού.
Εδώ θα φανεί το πώς η γεωμετρία θα περάσει μέσα στην ανάλυση τροφοδοτώντας το πρόβλημα της προσέγγισης. Αυτό θα επιτευχθεί με το πρόβλημα της αξιολόγησης και με την λύση της $x^2+x=\sqrt{2}$.
Απόκτηση ιστορικών γνώσεων στο πρόβλημα.

Ιστορική αναδρομή

1) Βαβυλώνειος πίνακας BM 13901
2) Βαβυλώνειος πίνακας BM 34568
3) «Αριθμητικά» Διόφαντου
4) «Ars Magna» του Cardan
5) «Στοιχεία» του Ευκλείδη
6) «Brâhmasphutasiddhânt» του Brahmagupta
7) «Kitãb al-jabr wa al-muqãbala» του Al-Khwãrizmi
8) «In artem analyticam isagoge» του François Viète
9) «La Géométrie» του René Descartes
10) «Speculationes diversiae» του Benedetti

Εδώ θα ασχοληθούμε με τον πίνακα BM 13901 και «Brâhmasphutasiddhânt».
Το παράδειγμα του πίνακα BM 13901 θα μας δώσει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο πυρήνας του αλγεβρικού λογισμού είναι η απλοποίηση του αλγεβρικού προβλήματος.
Με το δεύτερο παράδειγμα στο 6ο Μάθημα θα δούμε ότι η αλγεβρική απλοποίηση μπορεί να κρύβει πληροφορίες συγκριτικά με την αλγεβρική λύση, η οποία μοιάζει πολλές φορές ad hock.

Πίνακας ΒΜ 13901



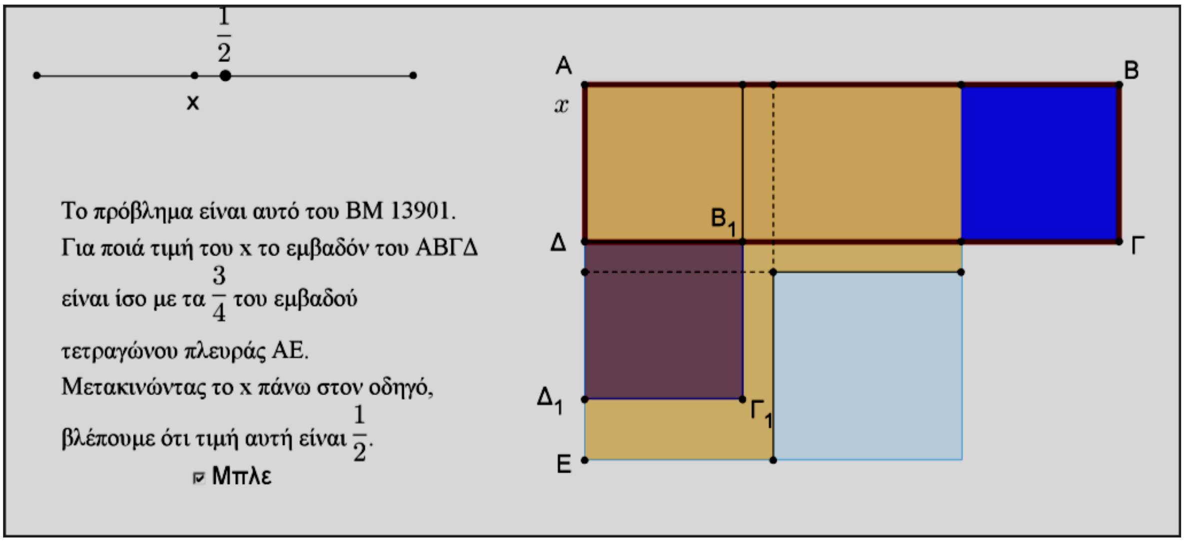
Εικόνα 1 Πίνακας ΒΜ 13901, δες [20].

eqlam[am] ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45 - e 1 wa-ṣi-tam
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [30] ù 30 tu-uš-ta-kal
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1 - e 1 imtaḫar 30 ša tu-uš-ta-ki-lu
lib-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

Πρόκειται για ένα πρόβλημα που επιλύεται με την δημιουργία μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού. Η λύση βασίζεται στην δημιουργία τέλειου τετραγώνου στο αριστερό μέλος της και μετά ακολουθεί η εξαγωγή της θετικής τετραγωνικής ρίζας.

eqlam[am] ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45-e 1 wa-ṣi-tam ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [30] ù 30 tu-uš-ta-kal 15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1-e 1 imtaḫar 30 ša tu-uš-ta-ki-lu lìb-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum			
προσθέτω την επιφάνεια και την πλευρά του τετραγώνου μου και κάνουν 45΄	$x^2+x=45'=\frac{45}{60}$	Οι αριθμοί είναι με βάση το 60. Έτσι, 45΄ είναι $\frac{45}{60}$ 30΄ είναι $\frac{30}{60}$	$x^2+x=\frac{3}{4}$
Πάρε το 1: την μονάδα	$x\cdot x+\mathbf{1}\cdot x=\frac{45}{60}$		
Γράψε το 1 σαν 2 30΄	$x^2+\mathbf{2}\cdot\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{60}}\cdot x=\frac{45}{60}$		$x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x=\frac{3}{4}$
Σπάσε το 30΄ και 30΄ σε 15΄		$\frac{30}{60}\cdot\frac{30}{60}=\frac{15}{60}\cdot\frac{60}{60}$	
Πρόσθεσε 15΄ στο 45΄	$x^2+2\cdot\frac{30}{60}\cdot x+\left(\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{60}}\right)^{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{60}}+\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{60}}$		$x^2+2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$
Το τετράγωνο αυτό είναι το 1	$\left(x+\frac{30}{60}\right)^2=1^2$		$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1^2$
(*)	$x+\frac{30}{60}=1$		$x+\frac{1}{2}=1$
Αφαίρεσε 30΄, και σπάσε το 1: 30΄	$x+\frac{30}{60}-\frac{30}{60}=1-\frac{30}{60}$		$x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$
Η πλευρά του τετραγώνου είναι:	$x=\frac{30}{60}$		$x=\frac{1}{2}$

Η Γεωμετρική σημασία:



Εικόνα 2 BM 13901.ggb

Πρέπει να τονίσουμε ότι το γινόμενο αριθμών μπορούμε να το δούμε με δύο τρόπους:

- **αλγεβρικά**, που είναι ένας νέος αριθμός με τις γνωστές ιδιότητες καθώς και
- **γεωμετρικά** σαν εμβαδόν ορθογωνίου, για παράδειγμα: το α * β είναι το εμβαδόν ενός ορθγωνίου διαστάσεων α και β.

Το πρόβλημα ζητάει να βρούμε για ποιές τιμές του x το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, που είναι ίσο με $x^2 + 1 \cdot x$, είναι ίσο με τα ¾ του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΑΕ = 1. Μετακινώντας τον δείκτη x πάνω στον οδηγό κίνησης, πάνω αριστερά, βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν x=1/2. Δες το αρχείο BM 13901.ggb. Δηλαδή, για x=1/2 το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι ίσο με το εμβαδόν με το κίτρινο χρώμα που δεν είναι τίποτα άλλο παρά τα ¾ του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΑΕ.

Έκτοτε όλες οι αλγεβρικές λύσεις που ακολούθησαν βασίζονται πάνω στην ιδέα της συμπλήρωσης τετραγώνου. Μια τέτοια λύση είναι και η λύση που γνωρίσατε στην Γ γυμνασίου και την οποία χρησιμοποιήσαμε και εμείς στο πρώτο μάθημα. Πρόκειται για την λύση «Brâhmasphutasiddhânt» του Brahmagupta, όπως έχει επικρατήσει να την λέμε.

Brâhmasphutasiddhânt

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $a x^2 + b x + c = 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow ax^2+bx=-c \\ &\Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac \\ &\Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac \\ &\Leftrightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac \\ &\Leftrightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Τον αλγόριθμο αυτό ακολουθούμε και σήμερα. Η ποσότητα $b^2 - 4ac$ είναι μια χαρακτηριστική αλγεβρική ποσότητα για την συγκεκριμμένη εξίσωση και ονομάζεται **διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$**.

Ασκήσεις:

1) Να λυθεί, σύμφωνα πάντα με τον αλγόριθμο BM 13901 και τον αλγόριθμο Brahmagupta, η εξίσωση: $x^2 + x = \frac{5}{16}$
2) Να δώσετε την γεωμετρική σημασία της λύσης της εξίσωσης της άσκησης 1, όπως έγινε στο παράδειγμα BM 13901.

3) Ανοίγωντας το αρχείο BM 13901_1.ggb, έχετε την γεωμετρική αναπαράσταση του αλγορίθμου BM 13901. Δώστε δύο παραδείγματα εξισώσεων που λύνονται σύμφωνα με την γεωμετρική τους σημασία την οποία θα επιλέξετε εσείς.

4) Μπορείτε να επιλύσετε με τον αλγόριθμο ή με την γεωμετρική κατασκευή, του αλγορίθμου BM 13901, την εξίσωση $x^2 + x = \frac{4}{6}$?

   (Υπόδειξη: Δες 13901_2.ggb **ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ version του GEOGEBRA 4.2.18.0)**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 (5η Διδακτική)

1) Συμπληρώστε τα κενά έτσι ώστε να είναι η παρακάτω αλγεβρική παράσταση τέλειο τετράγωνο :

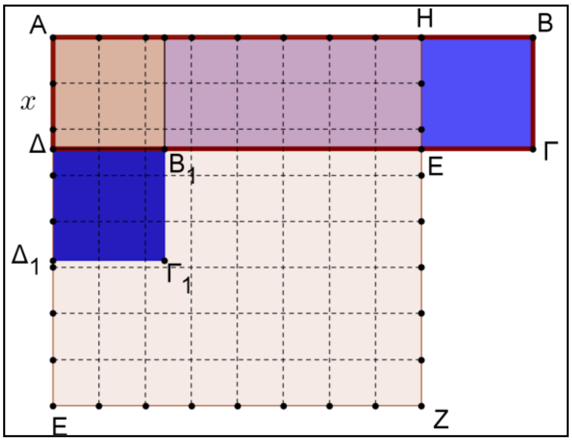
$$x^2 + x + \ldots\ldots\ldots = (x + \ldots\ldots)^2$$

να λυθεί η εξίσωση:

$$(x + \ldots\ldots)^2 = 1$$

2) *Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ΑΒΓΔ (ΑΒ = x+1, ΑΔ = x), είναι τα ¾ του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΑΕ(=ΑΗ) ?*

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Μεταφέρουμε το τετράγωνο ΗΒΓΕ στην θέση $ΔB_1Γ_1Δ_1$ έτσι ώστε (ΑΒΓΔ) = ($ΑΗΕB_1Γ_1Δ_1$).

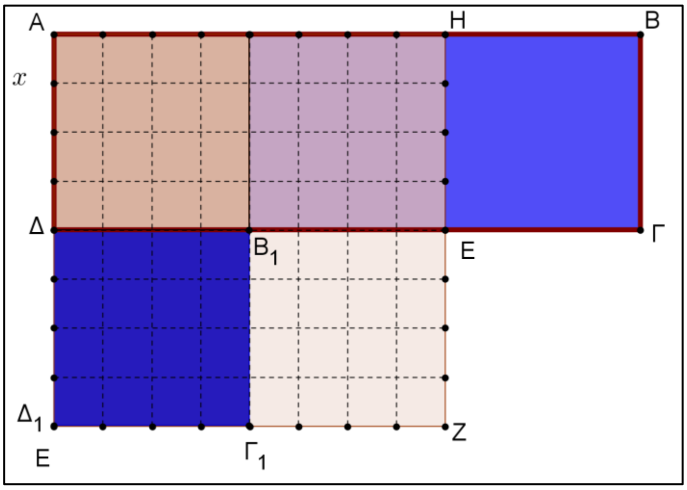


Δώστε την αλγεβρική μορφή του εμβαδού (ΑΒΓΔ) συναρτήσει του x:

E(x) = ………………………………………………..

Σκοπός μας τώρα είναι τώρα να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + x = \frac{3}{4}$

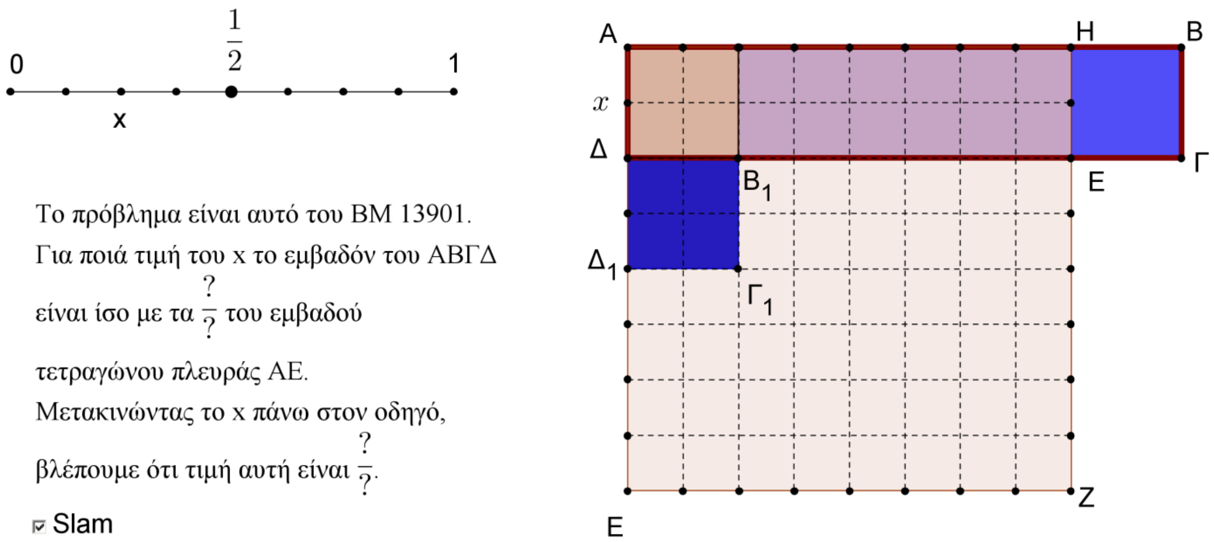
Υπάρχουν πολλοί τρόποι να λύσουμε την εξίσωση αυτή. Ας δούμε τον πρώτο ιστορικά: Κάνετε το αριστερό μέλος της εξίσωσης τέλειο τετράγωνο προσθέτοντας έναν κατάλληλο θετικό αριθμό. Στην προηγούμενη άσκηση βρήκατε τον αριθμό $\frac{1}{4}$. Αν μετακινήστε τον δείκτη x στην επιφάνεια του Geogebra έτσι ώστε το εμβαδόν ($ΑΗΕB_1Γ_1Δ_1$) να γίνει τα $\frac{3}{4}$ του (ΑΗΖΕ), μπορείτε να δείτε που παρουσιάζεται ο αριθμός $\frac{1}{4}$ στο σχήμα?



Να λύσετε τώρα την εξίσωση $x^2 + x = \frac{3}{4}$

……………………….

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ:



Στο παραπάνω σχήμα βλέπετε ένα σχήμα όμοιο με τα προηγούμενα. Αν ΑΗ = ΑΕ = 1 μονάδα και ΑΔ=ΗΒ=x μονάδες, μπορείτε να βρείτε το x έτσι ώστε να έχουμε τα ποσοστά των εμβαδών που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα του αρχείου ΒΜ 13901_1.ggb?

Ασκήσεις:

1) Να λυθεί, σύμφωνα πάντα με τον αλγόριθμο ΒΜ 13901 και τον αλγόριθμο Brahmagupta, η εξίσωση: $x^2 + x = \frac{5}{16}$
2) Να δώσετε την γεωμετρική σημασία της λύσης της εξίσωσης της άσκησης 1, όπως έγινε στο παράδειγμα ΒΜ 13901.
3) Ανοίγωντας το αρχείο ΒΜ 13901_1.ggb, έχετε την γεωμετρική αναπαράσταση του αλγορίθμου ΒΜ 13901. Δώστε δύο παραδείγματα εξισώσεων που λύνονται σύμφωνα με αυτήν την γεωμετρική αναπαράσταση του αλγορίθμου.
4) Να λύσετε με τον αλγόριθμο ή με την γεωμετρική κατασκευή, του αλγορίθμου ΒΜ 13901, την εξίσωση $x^2 + x = \frac{4}{6}$.

   (Υπόδειξη: Δες 13901_2.ggb **ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ version του GEOGEBRA 4.2.18.0)**

6η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΙ: Να κατανοήσουν την υπεροχή της άλγεβρας έναντι οποιασδήποτε άλλης μεθόδου υπολογισμού ριζών πολυωνύμων.

Να κατανοήσουν την ανάγκη χρήσης ενός υπολογιστικού συστήματος για την πιστοποίηση του αλγεβρικού αποτελέσματος.

Επίλυση ασκήσεων 15min

Στο πρώτο θέμα αξιολόγησης διερευνούμε και εισάγουμε τους μαθητές σε δύο μαθηματικά ερωτήματα:

1) Το ερώτημα μεταξύ προσεγγίζω και υπολογίζω που δεν είναι άλλο από την διαφορά μεταξύ ανάλυσης και άλγεβρας. Εδώ, θα δείξουμε ότι το πρόβλημα της συνεχούς προσέγγισης μπορεί να αντικατασταθεί με τον περιγραφικό ορισμό του αντικειμένου (στην περίπτωσή μας η ρίζα της εξίσωσης) της άλγεβρας.
2) Το δεύτερο ερώτημα, αφορά την διδακτική (Το ερώτημα εξαρτάται από το σύστημα. Είναι πάντως μια καλή ευκαιρία για να δούμε πως λειτουργεί το zoom στην περίπτωση. Δες βιβλιογραφία Ζαχαριάδη στο πρόγραμμα CALGEO, http://www.math.uoa.gr/calgeo/)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 (6^{η} Διδακτική)

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

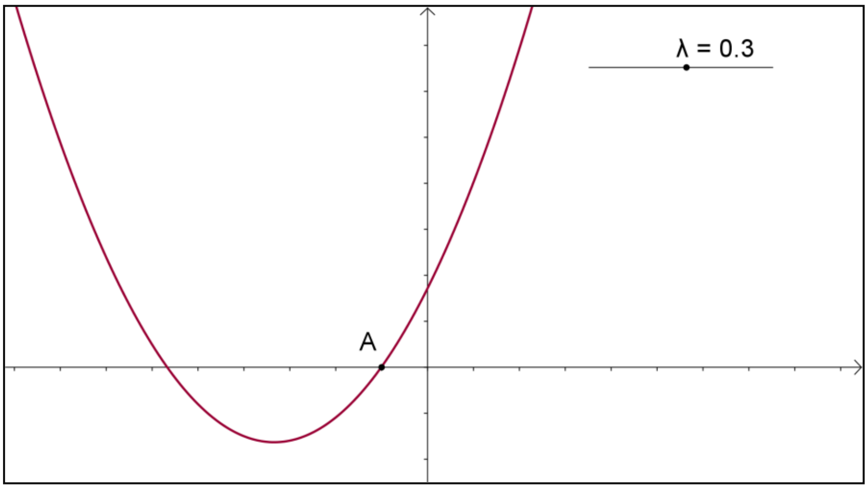
1. **Να λύσετε με την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στο πρόβλημα του ΒΜ 13901, (αλγεβρική ή γεωμετρική), την εξίσωση:**

$$x^2 + x = \sqrt{2}$$

   1. Δώστε την αλγεβρική λύση του προβλήματος.
   2. Πως θα χρησιμοποιήσετε την γεωμετρική λύση για τον εντοπισμό του παράγοντα που θα κάνει το πρώτο μέλος της εξίσωσης τέλειο τετράγωνο?
   3. Με ποιες ευριστικές τεχνικές θα μπορούσατε να προσεγγίσετε όσο το δυνατό καλύτερα τον αριθμό $\sqrt{2}$ στο πρόβλημα?
   4. Αξιολογήστε τις δύο μεθόδους.

2. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$ έχει πάντα πραγματικές ρίζες, λ≠0.**

   (Ασκηση 3^{Α} σελ. 93 του σχολικού, έχει διδαχθεί. Με την γεωμετρική αναπαράσταση θα δούμε περισσότερα από ότι μια αλγεβρική λύση.)



Μετακινώντας τον δείκτη λ, μπορείτε να επαληθεύσετε το αλγεβρικό αποτέλεσμα? Γιατί το γράφημα διέρχεται πάντα από το σημείο Α ?

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Να λυθούν από Σημειώσεις: 169, 176, 177, 179 (στο GEOGEBRA), 204, δες [24].

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1) Να γίνει η άσκηση 179 των σημειώσεων στο Geogebra. Προσπαθείστε να απεικονίσετε την αλγεβρική λύση πάνω στο διάγραμμα. Αναγνωρίστε το πρόβλημα της προσέγγισης των τιμών των παραμέτρων που πηγάζει από την κακή θέση των δρομέων των παραμέτρων λ και μ. Ποια λύση προτείνετε? (Δείτε το αρχείο param_179.ggb.)

2) Έστω $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, μια εξίσωση δευτέρου βαθμού.
   a. παρατηρείστε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής του γραφήματος της $y = \alpha x^2$ και της $y = -\beta x - \gamma$.
   b. Να δώσετε την γεωμετρική σημασία της διακρίνουσας της εξίσωσης.

3) Η συνάρτηση rand(1..n) δίνει στο Maple έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ των 1 και n.
   Σκοπός μας είναι τώρα να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα 177 των σημειώσεων, που λύσαμε την 4^{η} διδακτική ώρα.
   1) Βρείτε έναν κατάλληλο τρόπο να αναπαραστήσετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
   2) Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αν έχουμε σε μια ρίψη το ενδεχόμενο (α,β,γ) σχηματίζουμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.
      i. Μπορεί η εξίσωση να έχει ρίζα το 0;
      ii. Η εξίσωση έχει θετικές ρίζες;
   3) Αφού γράψτε εναν αλγόριθμο που βρίσκει τις ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, να γράψετε έναν αλγόριθμο **alg1** που να έχει σαν είσοδο 3 τυχαίους αριθμούς μεταξύ 1 και 6, να εξετάζει αν η αντίστοιχη εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες και να επιστρέφει την λίστα των 3 τυχαίων αριθμών που ικανοποιούν την συνθήκη αυτή.

   4) Γράψτε έναν αλγόριθμο **alg2** που να έχει στην είσοδο έναν φυσικό n ο οποίος θα δείχνει τον αριθμό των ρίψεων των 3 ζαριών και στην έξοδο θα δίνει τον αριθμό των στοιχείων της λίστας της εξόδου του alg1.

5) Γράψτε έναν αλγόριθμο **alg3** που να έχει στην είσοδο έναν φυσικό αριθμό n ο οποίος θα δείχνει τον αριθμό των ρίψεων των 3 ζαριών και στην έξοδο θα δίνει τον αριθμό των στοιχείων της λίστας της εξόδου του alg1, που έχουν ακόμα έναν επιπλέον περιορισμό: έχουν ρίζα τον αριθμό -1.

6) Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

"**η σχηματιζόμενη εξίσωση να έχει ρίζα το -1**"

7) Τι θα σας δώσει ο νόμος των μεγάλων αριθμών σχετικά με το ενδεχόμενο του προηγουμένου πειράματος;