Επιμόρφωση Μαθηματικών Ρόδος 2017

- Διδακτική Ευκλείδειας Γεωμετρίας
- Διδασκαλία με χρήση Geogebra
- Δραστηριότητες

Κώστας Μαλλιάκας, Μαθηματικός
1ο Γενικό Λύκειο Ρόδου – Βενετόκλειο
kmath1967@gmail.com

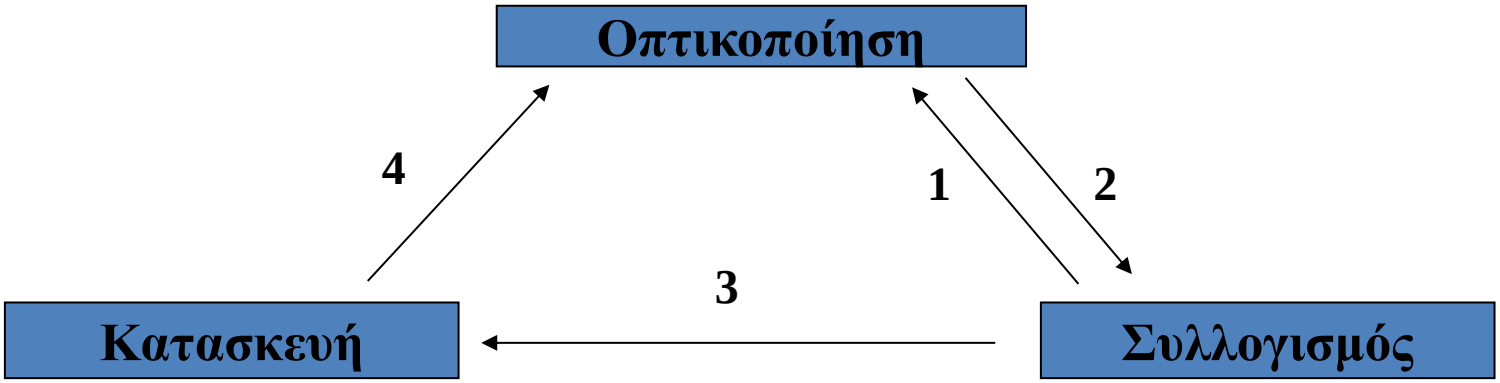
Διδασκαλία της Γεωμετρίας

Τρία είδη γνωστικών διαδικασιών:

Διαδικασίες οπτικοποίησης, αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, επεξήγηση προτάσεων, διερεύνηση σύνθετων καταστάσεων, έλεγχος υποθέσεων, επαλήθευση

Διαδικασίες κατασκευής, με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες

Διαδικασίες συλλογισμού.



Μαθησιακές δραστηριότητες στη Γεωμετρία

- Επίλυση προβλήματος
  (π.χ. κατασκευή παραλληλογράμμων)
- Εκτίμηση καταστάσεων σε τάξη μεγέθους
  (π.χ. περίμετρος, εμβαδόν)
- Εμπειρική νοητική αιτιολόγηση εικασιών
  (π.χ. ισότητα απέναντι πλευρών και γωνιών)
- Διατύπωση και έλεγχος συλλογισμών
  (π.χ. ισότητα διαγωνίων ορθογωνίου)
- Μοντελοποίηση καταστάσεων
  (π.χ. διατύπωση κριτηρίων παραλληλογράμμων)

ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (Fischbein, 1993)

- **Έννοια:** Νοητική κατασκευή που εκφράζει μια ιδέα, μια ιδεατή αναπαράσταση μιας ομάδας αντικειμένων (ή καταστάσεων) με βάση τα κοινά τους χαρακτηριστικά.
  Κάθε έννοια είναι ένα σύνολο χαρακτηριστικών.

- **Εννοιολογικό σχήμα:** Τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοερές κατασκευές, οι οποίες κατέχουν ταυτοχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Σε ένα εννοιολογικό σχήμα το νόημα και οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται από τυπικούς περιορισμούς (ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα).
  Για παράδειγμα, ένα παραλληλόγραμμο αποτελεί ένα σχήμα, μια αναπαράσταση στο χώρο και μια έννοια.

- Στο εννοιολογικό σχήμα εμφανίζονται τρεις κατηγορίες νοητικών αντικειμένων:
  - Ορισμός (στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος)
  - Εικόνα - οπτικό αντικείμενο (με βάση την αισθησιοαντιληπτική εμπειρία): αφορά τη συνύπαρξη νοητικών εικόνων που σχετίζονται στο νου με το σχήμα (π.χ. όλα όσα θυμίζουν παραλληλόγραμμο) και ιδιοτήτων
  - Σχηματική έννοια - ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο

(Υλικό) σχήμα ⟷ (Ιδεατό) γεωμετρικό σχήμα

↓

Λογικομαθηματικό νόημα

- Για την κατανόηση απαιτούνται καλά συγκροτημένες εικόνες της έννοιας παρά ορισμοί.

Χρησιμότητα του σχήματος στην διδασκαλία

- Ενισχύει τη γεωμετρική διαίσθηση κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου
- Παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των χαρακτηριστικών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση

ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Υπάρχουν τέσσερις τύποι γνωστικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος.

- **αντιληπτική**
- **ακολουθιακή**
- **λεκτική**
- **λειτουργική**

- **Αντιληπτική σύλληψη**
  - Αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά
  - Κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και διάκριση των υπο-σχημάτων του χωρίς περαιτέρω επεξεργασία του
- **Ακολουθιακή σύλληψη**
  - Απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος
- **Λεκτική σύλληψη**
  - Συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του.
- **Λειτουργική σύλληψη**
  - Εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος μέσα από διάφορους μετασχηματισμούς στο σχήμα που μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά είτε φυσικά και διευρύνουν τις δυνατότητες χειρισμού του.

Δυσκολίες μαθητών

- Δυσκολίες να αξιοποιήσουν το σχήμα για τη λύση του προβλήματος
- Στενή εξάρτηση από την αντιληπτική συνιστώσα και αδυναμία συσχέτισης της μαθηματικής έννοιας με το σχήμα
- Δυσκολία στην διάκριση δεδομένων και ζητούμενων
- Δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του γενικευμένου αντικειμένου. Η εικονική αναπαράσταση μιας έννοιας εκφράζει μόνο μεμονωμένα γραφικά στιγμιότυπά της.
- Η ισχυρή οπτική ενίσχυση της διαίσθησης μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού
- Δυσκολίες από το άμεσο πέρασμα σε ορισμούς και παραγωγικούς συλλογισμούς

Ιστορία των Μαθηματικών

- Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών έχει γίνει τα τελευταία χρόνια αντικείμενο συστηματικών μελετών.
  - Στην Ελλάδα διοργανώνονται διαλέξεις και Ημερίδες για την Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Διδασκαλία από την Επιστημονική Ένωση για την Διδακτική των Μαθηματικών.
  - Η Διεθνής Επιτροπή για τη Μαθηματική Εκπαίδευση εκδίδει συλλογικό τόμο με τίτλο *History in Mathematics Education.*
  - Διοργανώνονται ανά τριετία Ευρωπαϊκά Θερινά Πανεπιστήμια Ιστορίας και Επιστημολογίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση.
  - Στις ΗΠΑ, χρηματοδοτείται η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία για την ανάπτυξη του Ινστιτούτου Ιστορίας των Μαθηματικών και της αξιοποίησης της στην διδασκαλία.
  - Υπάρχουν ειδικά αφιερώματα σε περιοδικά όπως το *Educational Studies in Mathematics.*

Συνδετικός κρίκος όλων αυτών είναι η ομάδα *"International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics" (HPM) υπό την αιγίδα της International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).*

- Η διδασκαλία μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών και παράλληλης χρήσης Νέων Τεχνολογιών και εκπαιδευτικών περιβαλλόντων προκαλεί ανάμικτα συναισθήματα και ο συνδυασμός τους είναι μια διδακτική πρόκληση.

«…Η Γεωμετρία αποτελεί ένα εξαιρετικό εργαλείο για τη μελέτη της γλώσσας, κάτι που δεν είναι αμελητέο ακόμα και για τους μαθητές που στα ενδιαφέροντά τους δεν περιλαμβάνονται τα μαθηματικά…
Ο υπολογιστής χρησιμοποιείται για να δημιουργήσει ένα εργαστηριακό περιβάλλον όπου οι μαθητές καθοδηγούνται στο να ανακαλύψουν μαθηματικά που χρειάστηκαν κόποι για να ανακαλυφθούν με επίπονους αριθμητικούς υπολογισμούς.
Η πύλη εισόδου σε αυτές τις δραστηριότητες είναι η Ιστορία των Μαθηματικών…»

(Τεύκρος Μιχαηλίδης, Το λάπτοπ του Αρχιμήδη)

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης Van Hiele

Βασικά χαρακτηριστικά

- **Καθορισμένη διαδοχική σειρά**: για να μεταβώ σε ένα επίπεδο πρέπει να περάσω από **<u>όλα</u>** τα προηγούμενα
- **Ανεξάρτητα ηλικίας:** Δεν παίζει ρόλο η ηλικία για το ποιο επίπεδο μπορεί να φτάσει ο διδασκόμενος, όμως η ηλικία σχετίζεται με τις γνωστικές και κοινωνικές εμπειρίες που έχει αποκτήσει και επηρεάζουν τη μάθηση
- Κάθε επίπεδο έχει τα **δικά του γλωσσικά σύμβολα** για τα γεωμετρικά αντικείμενα και τις διάφορες έννοιες και σχέσεις και πρέπει ο διδάσκων να επιχειρηματολογεί στο ίδιο επίπεδο με τον διδασκόμενο για να υπάρχει συνεννόηση
- Η **Γεωμετρική εμπειρία** επηρεάζει την πρόοδο και η διδασκαλία πρέπει να έχει στόχους να βοηθήσει τον διδασκόμενο να περνάει από διάφορες φάσεις που οδηγούν σε ανώτερο επίπεδο

Επίπεδα Van Hiele

Ε0: Εποπτική αντίληψη – Νοερή απεικόνιση

- **Τα σχήματα κρίνονται από την εμφάνιση τους**
- **Αντικείμενα σκέψης: τα σχήματα και η μορφή τους**
- **Προϊόντα σκέψης: ομάδες σχημάτων που μοιάζουν**

Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο μπορούν:

- να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν σχήματα με βάση τα οπτικά χαρακτηριστικά τους,
- να κάνουν μετρήσεις διαφόρων στοιχείων τους και
- να συζητούν για τις ιδιότητες τους αλλά χωρίς σαφήνεια.

Εδώ είναι έντονη η εικόνα που έχουν μέσα τους για το σχήμα και μπορεί το μέγεθος και ο διαφορετικός προσανατολισμός του να τους επηρεάσει στην αναγνώριση και ονομασία του. Συνήθης σύγχυση εμφανίζεται στο τετράγωνο και στον ρόμβο …

Ε1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων

- **Τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους**
- **Αντικείμενα σκέψης: τάξεις (κλάσεις) σχημάτων**
- **Προϊόντα σκέψης: ιδιότητες σχημάτων**

Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο:

- δεν επηρεάζονται από τον προσανατολισμό ή το μέγεθος του σχήματος,
- συνειδητοποιούν ότι κάποια σχήματα ανήκουν στην ίδια κλάση λόγω των κοινών ιδιοτήτων τους,
- γενικεύουν ιδιότητες και διακρίνουν τις τάξεις σχημάτων,
- μπορούν να καταγράφουν τις ιδιότητες των σχημάτων (δεν μπορούν όμως ακόμη να συμπεράνουν για παράδειγμα ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και όλα τα τετράγωνα και οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα) και
- συνδέουν τις ιδιότητες με τα σχήματα αλλά δεν τις διατάσσουν σε μια συνέχεια.

Ε2: Μη τυπική παραγωγή – αρχή παραγωγικής σκέψης και μαθηματικών συλλογισμών

- **Αντικείμενα σκέψης: ιδιότητες σχημάτων**
- **Προϊόντα σκέψης: σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων**

Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο:

- διακρίνουν σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων (για παράδειγμα συμπεραίνουν ότι το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο,
- διατάσσουν ιδιότητες και παράγουν νέες από τις προηγούμενες,
- αυξάνουν την ικανότητα συλλογισμών και μπορούν να ταξινομούν τα σχήματα επιλέγοντας τις κατάλληλες και απολύτως αναγκαίες ιδιότητες,
- κατανοούν την επιλογή των ορισμών που χαρακτηρίζονται από «οικονομία»,
- κάνουν διαισθητικά αποδείξεις και δίνουν επιχειρήματα και
- εκτιμούν την αξία και τη σημασία των λογικών επιχειρημάτων.

Ε3: Γεωμετρικοί συλλογισμοί - παραγωγική σκέψη - νόημα συνεπαγωγής

- **Αντικείμενα σκέψης: σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων**
- **Προϊόντα σκέψης: παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη Γεωμετρία**

Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο:

- παράγουν εικασίες – υποθέσεις για σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων και αναρωτιούνται για την «αλήθεια» τους (για παράδειγμα σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παραλληλόγραμμα από τις διαγώνιες τους),
- αναπτύσσουν δομημένα συστήματα ανάμεσα σε αξιώματα – ορισμούς – θεωρήματα – πορίσματα και άλλα συμπεράσματα και
- αποδεικνύουν με λογικά επιχειρήματα και όχι μόνο βασισμένα στη διαίσθηση, στην παρατήρηση και στη μέτρηση, αλλά και κατανοούν την αναγκαιότητα των αποδείξεων.

Ε4: Αυστηρότητα - Αφαίρεση

- **Αντικείμενα σκέψης: παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη Γεωμετρία**
- **Προϊόντα σκέψης: Συγκρίσεις – αντιπαραβολές μεταξύ διαφορετικών αξιωματικών συστημάτων**

Οι μαθητές/τριες σε αυτό το επίπεδο:

- μπορούν να κατανοήσουν ότι ιδιότητες και θεωρήματα που ισχύουν στο αξιωματικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας πιθανόν δεν ισχύουν ή είναι διαφορετικές σε άλλες Γεωμετρίες.

  (π.χ μπορούν να αναγνωρίσουν τις προτάσεις που οφείλονται στο «Ευκλείδειο Αίτημα» και να αντιληφθούν την αλληλουχία

Ευκλείδειο Αίτημα

Σχέσεις γωνιών από δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη

Άθροισμα γωνιών τριγώνων και πολυγώνων

Χρήση στις ιδιότητες παραλληλογράμμων

«Ο δάσκαλος της Γεωμετρίας …»

Τα Αναλυτικά προγράμματα Γεωμετρίας σχεδιάζονται (;;;;) έτσι ώστε σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης οι απαιτήσεις να αντιστοιχούν και σε κάποια επίπεδα.

Ο κάθε διδάσκων όμως μπορεί κατά την κρίση του να ανεβάζει ή κατεβάζει επίπεδα για τις διδακτικές ανάγκες της τάξης του.

Ε0: Νηπιαγωγείο – Δ΄ δημοτικού
Ε1: Δ΄ δημοτικού – Στ΄ δημοτικού
Ε2: Ε΄ δημοτικού – Γ΄ γυμνασίου
Ε3: Λύκειο
Ε4: Σπάνια συναντάται σε μαθητές, αλλά και σε φοιτητές

«Οι ασκήσεις και οι δραστηριότητες που δίνονται στους μαθητές πρέπει να τους βοηθούν να ανεβάσουν **σταδιακά** τα επίπεδα»

Ανάπτυξη δημιουργικότητας από τους μαθητές

Κεϊσογλου, Σ., 6ο Συνέδριο ΕΝΕΔΙΜ

Ποιες δραστηριότητες είναι κατάλληλες για την ανάπτυξη Μαθηματικής δημιουργικότητας;

- Λύση προβλημάτων μη αλγοριθμικού χαρακτήρα στα οποία οι μαθητές δεν κατέχουν μεθοδολογία λύσης
- Διατύπωση προβλήματος με αφετηρία μια κατάσταση, όπου ζητείται η διατύπωση μαθηματικών ερωτημάτων από τους μαθητές
- Ανοικτά προβλήματα που απαιτούν αναδιατύπωση και αναδόμηση και να μην απαιτούν μοναδική, αλλά πολλαπλές λύσεις

Haylock, 1997

Ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών μέσων στην ανάπτυξη δημιουργικότητας;

- Ως εργαλεία έρευνας, αναζήτησης και πειραματισμού, δίνουν ευκαιρίες δημιουργικών δραστηριοτήτων
- Ως εκφραστικά εργαλεία, δίνουν δυνατότητες προσωπικής εμπλοκής και δημιουργίας
- Ως εργαλεία επικοινωνίας , αναπτύσσουν κοινωνικές πτυχές της δημιουργικότητας μέσα από συμμετοχές σε μορφές συλλογικότητας

Μπορούν να υλοποιηθούν δραστηριότητες που αναπτύσσουν την μαθηματική δημιουργικότητα μέσα στα πλαίσια των σχολικών υποχρεώσεων;

Αυτό θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε εμείς …

Geogebra: Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας

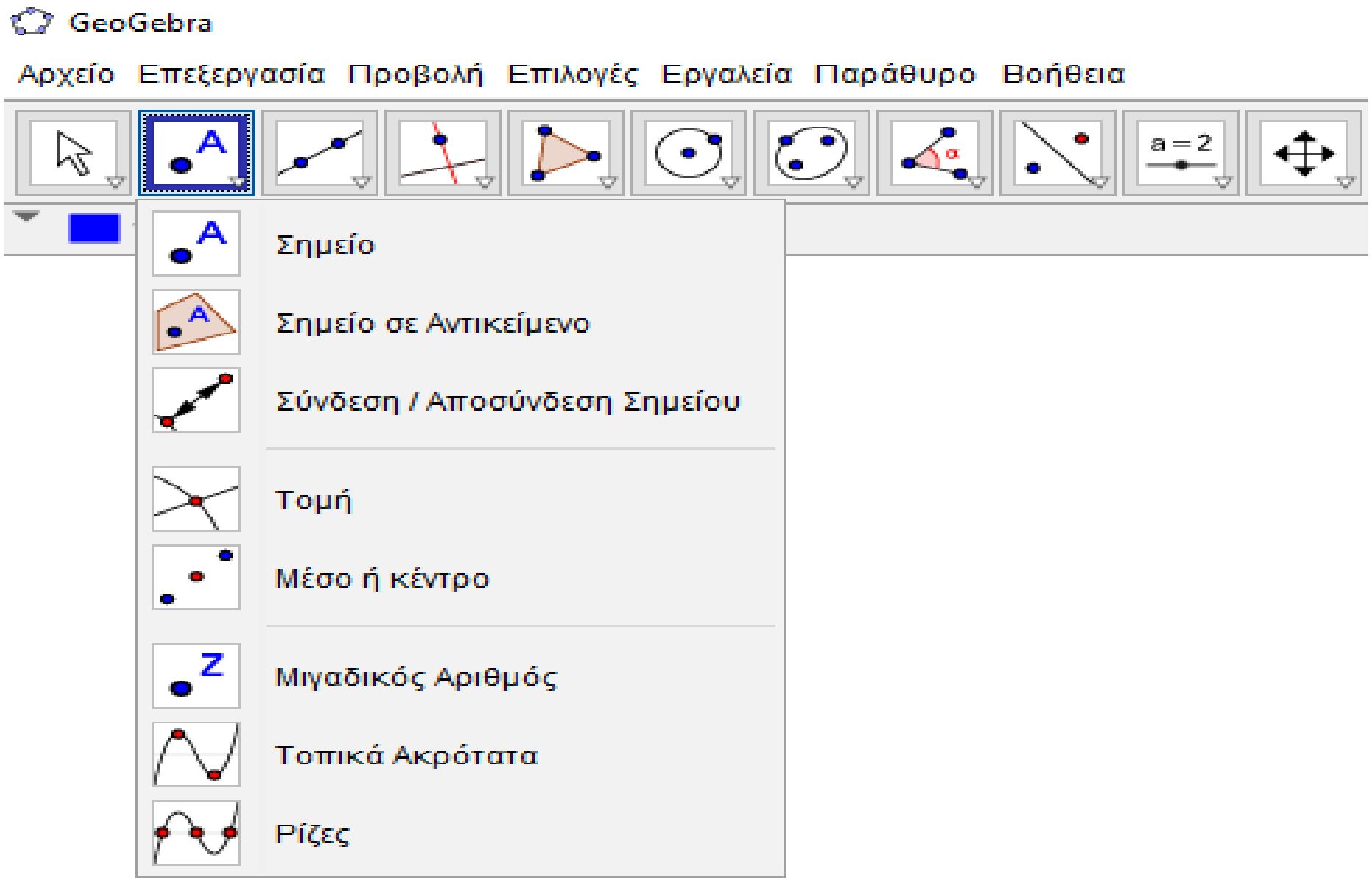
Με τον όρο ***«Δυναμική Γεωμετρία»*** εννοούμε ένα συνεχή και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμό των γεωμετρικών αντικειμένων, ο οποίος επιτρέπει:

- *Ελεύθερη κίνηση στοιχείων και παρατήρηση μεταβολών αλλά και αναλλοίωτων στοιχείων*
- *Διατύπωση εικασιών*
- *Βοήθεια στην απόδειξη*

Βασικά «εργαλεία» του Geogebra

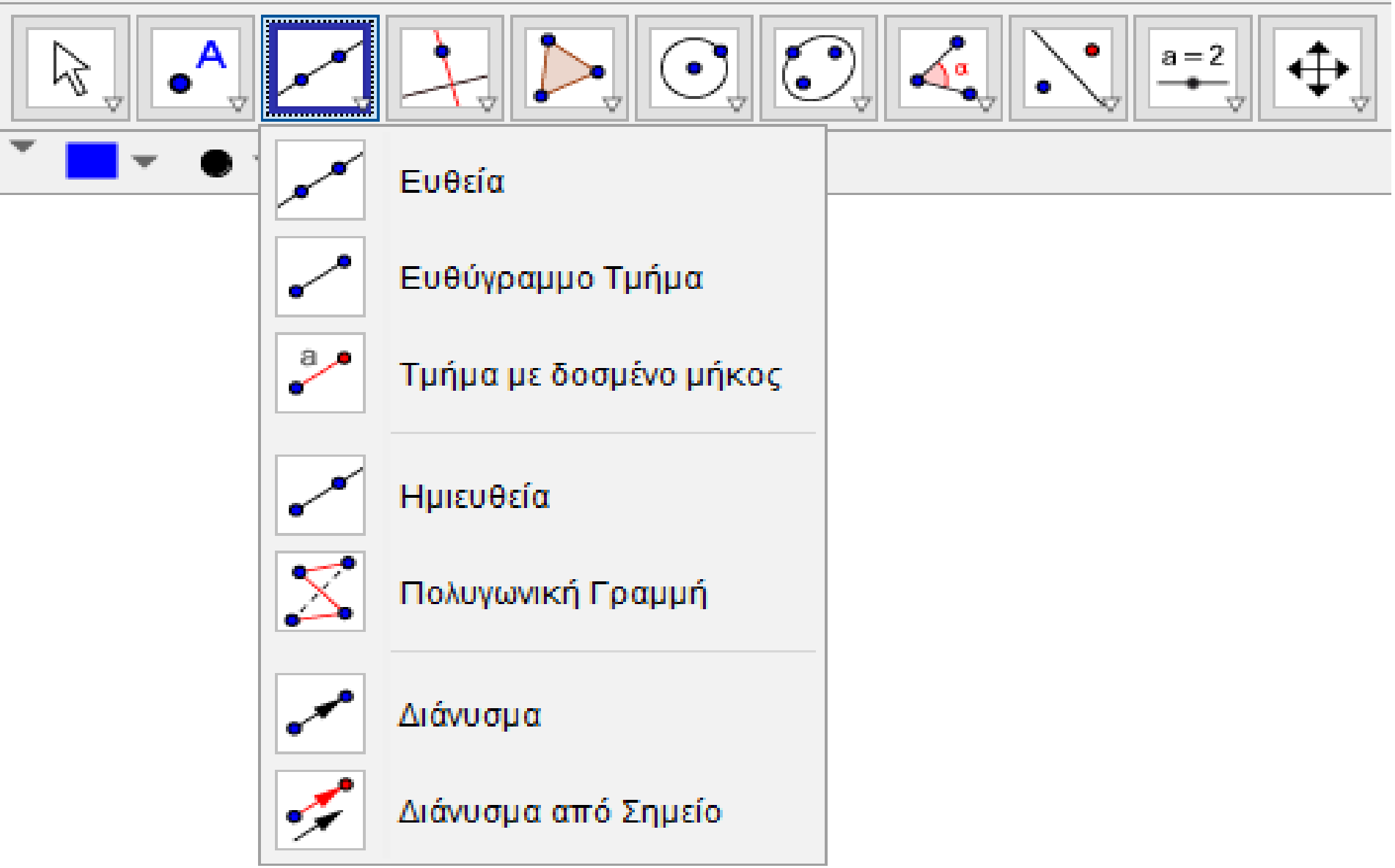
- Κατασκευή αρχικών αντικειμένων (σημείο, ευθεία,…)
- Κατασκευή βασικών γραμμών (κάθετες, παράλληλες,…)
- Μετρήσεις (απόσταση, γωνία, εμβαδόν,…)
- Μετασχηματισμοί (περιστροφή, ανάκλαση, συμμετρίες,…)
- Εμφάνιση–απόκρυψη (ονομάτων, μετρήσεων, κειμένων,…)
- Κίνηση – ίχνος – χρώματα
- Κατασκευή γεωμετρικών τόπων
- Δυνατότητα αντιγραφής σχήματος και μεταφορά σε Word
- Δυνατότητα εισαγωγής εικόνας από άλλα αρχεία

Το περιβάλλον του Geogebra



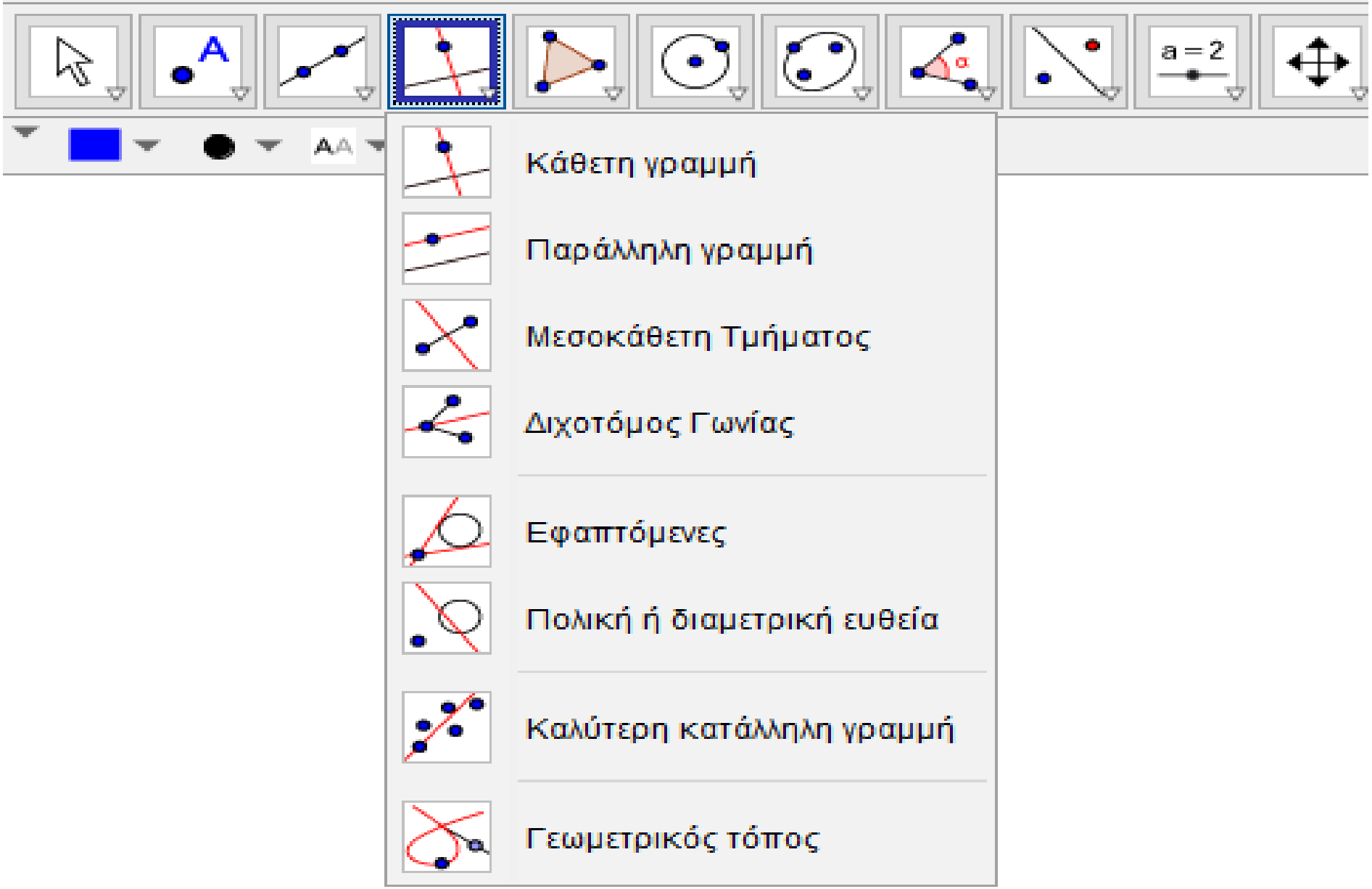
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



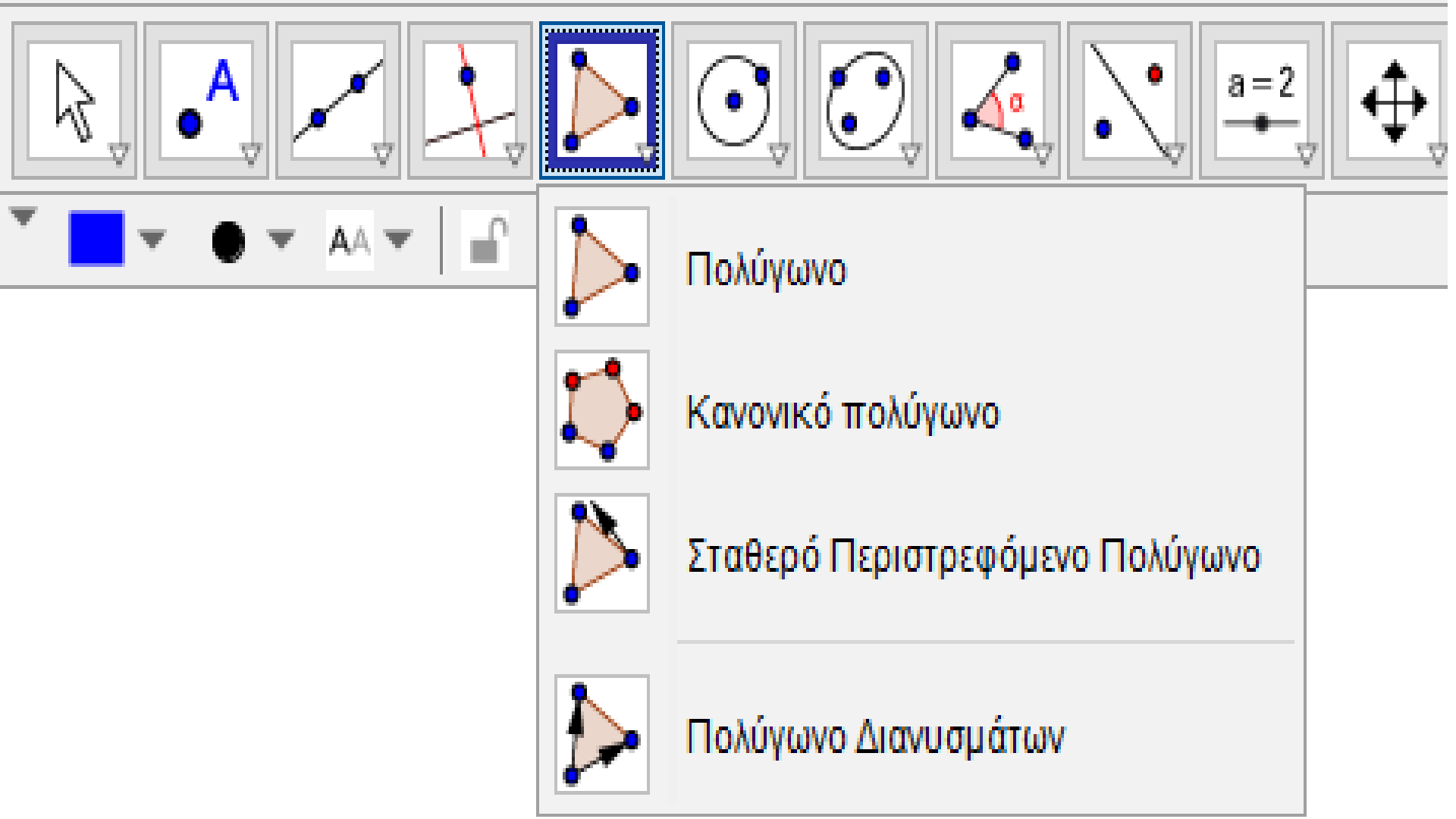
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



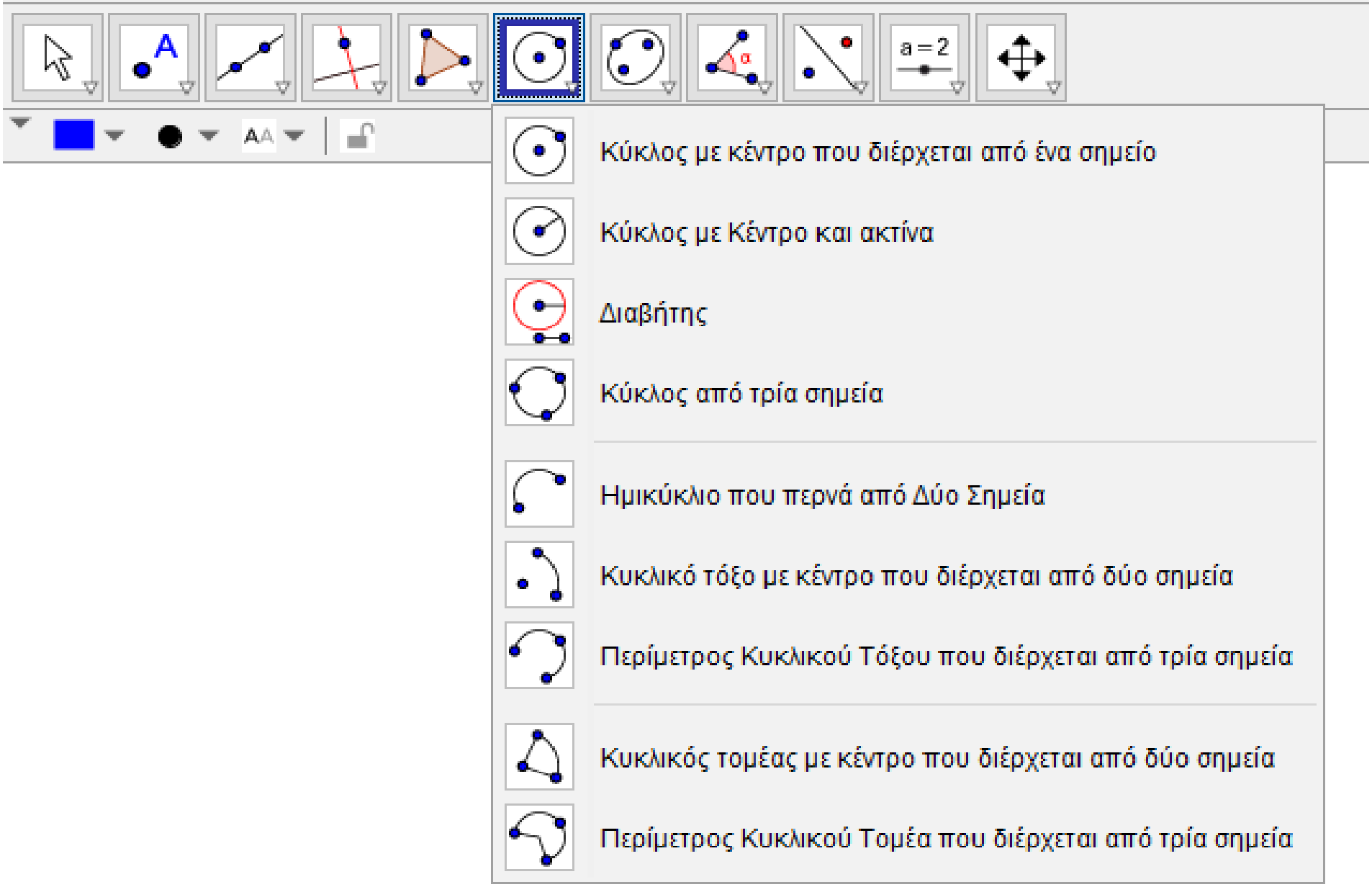
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



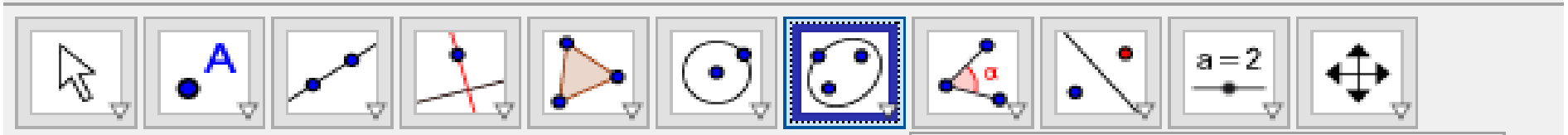
GeoGebra

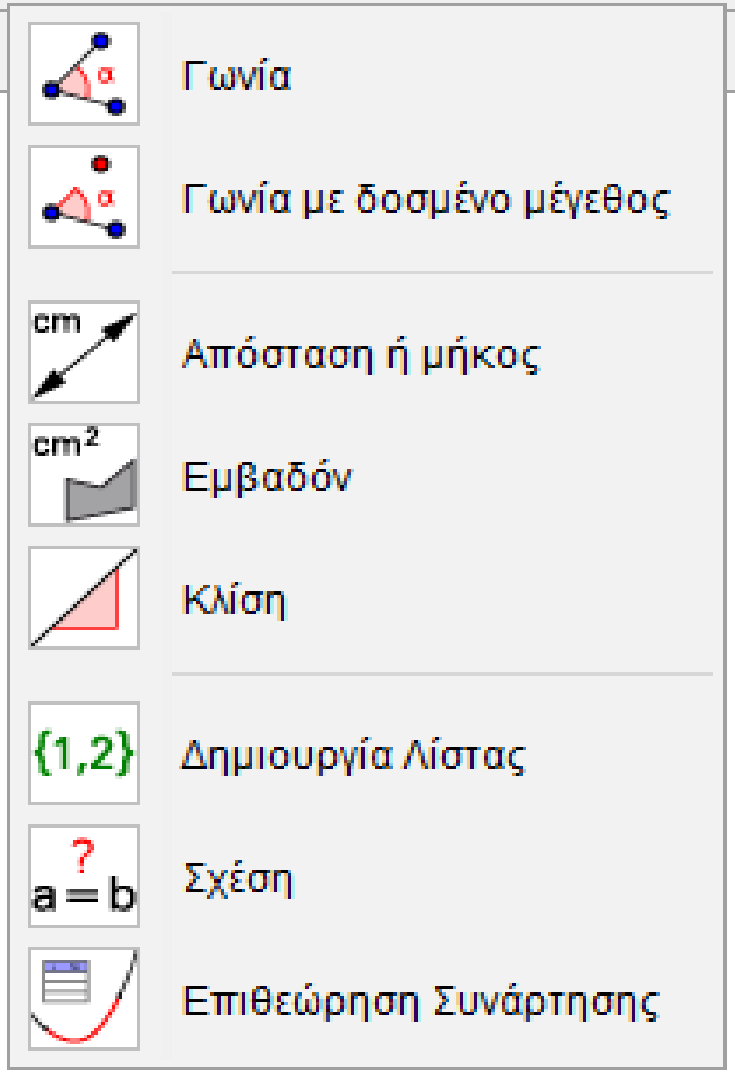
Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



GeoGebra

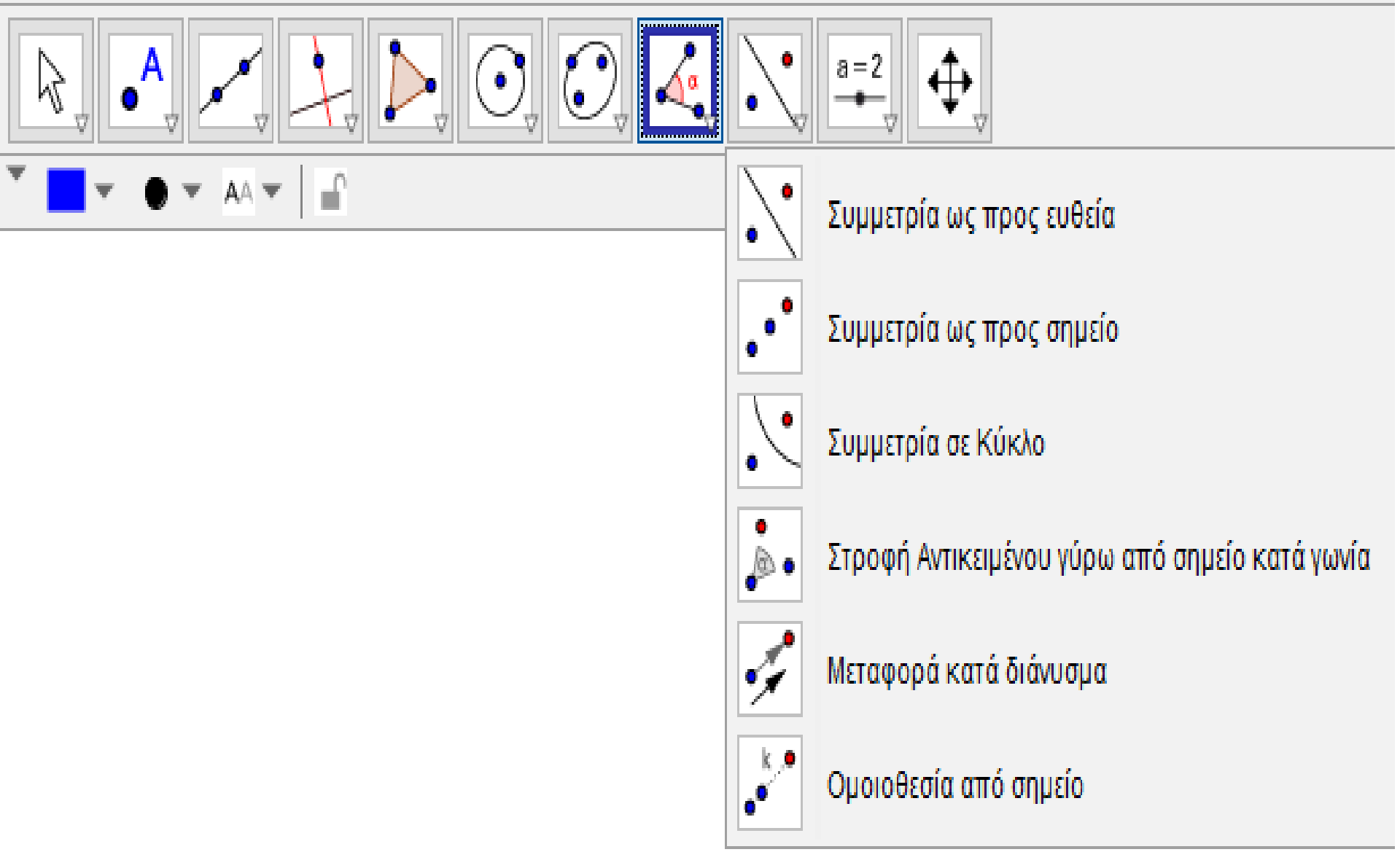
Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια





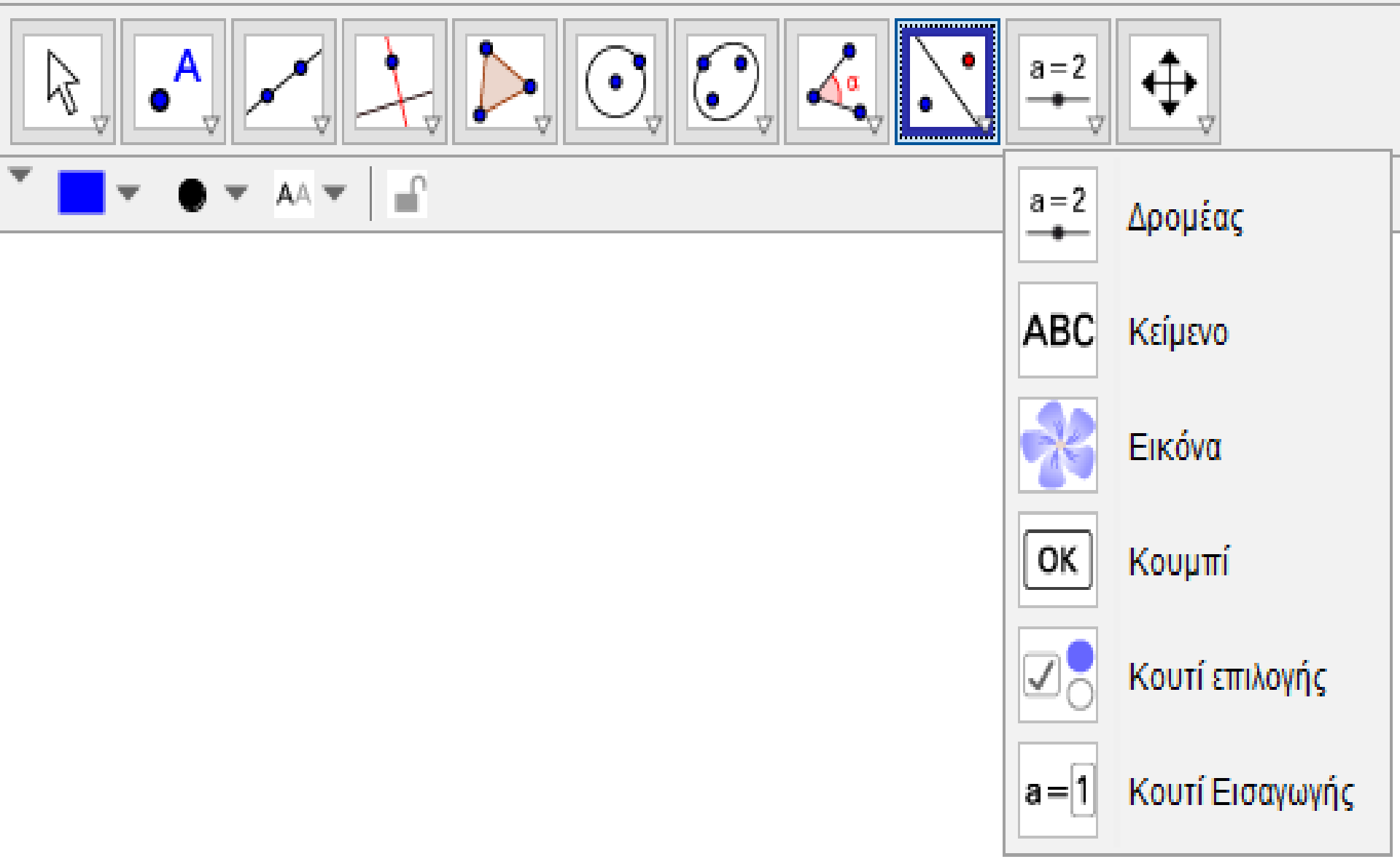
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



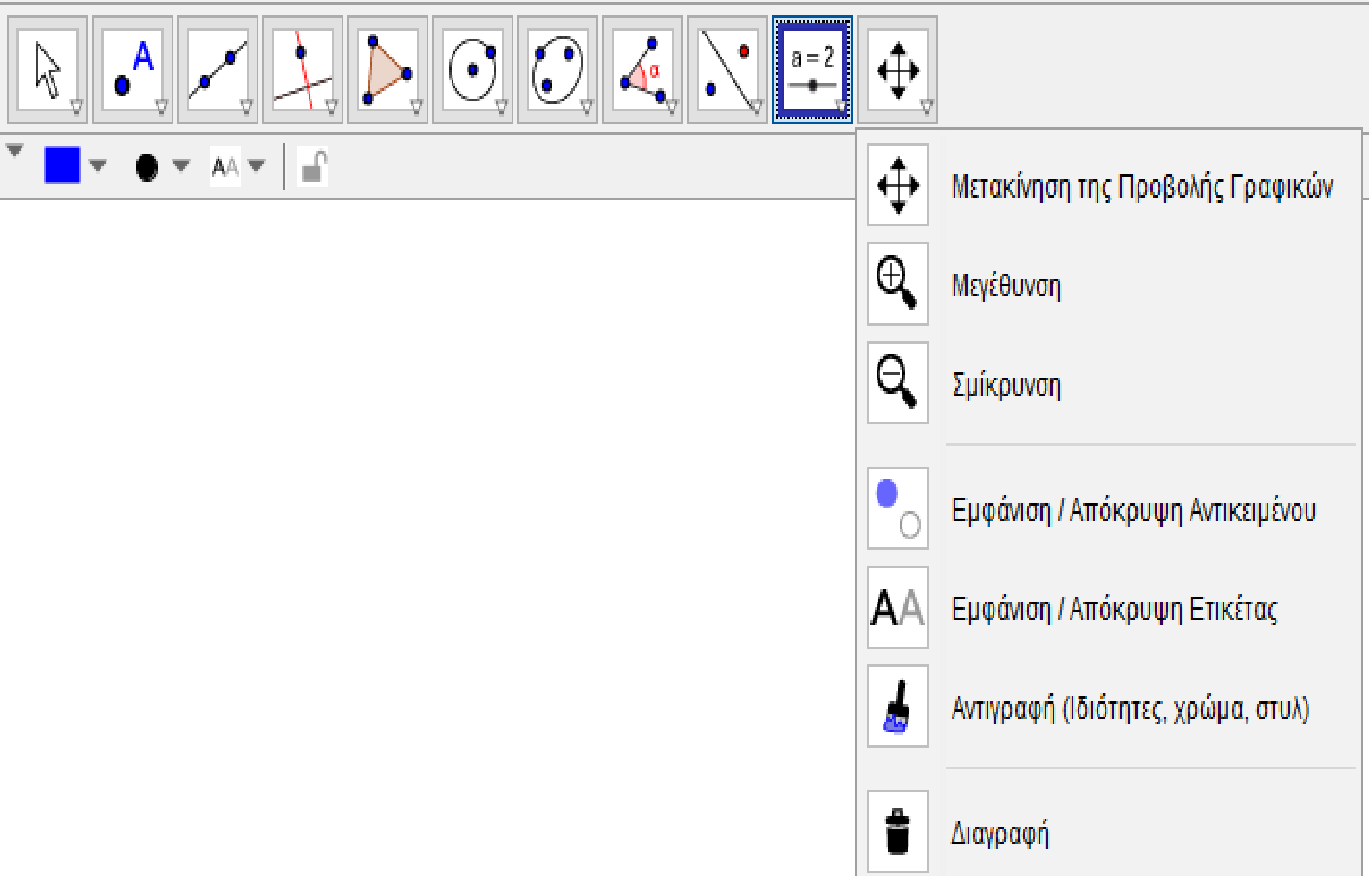
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



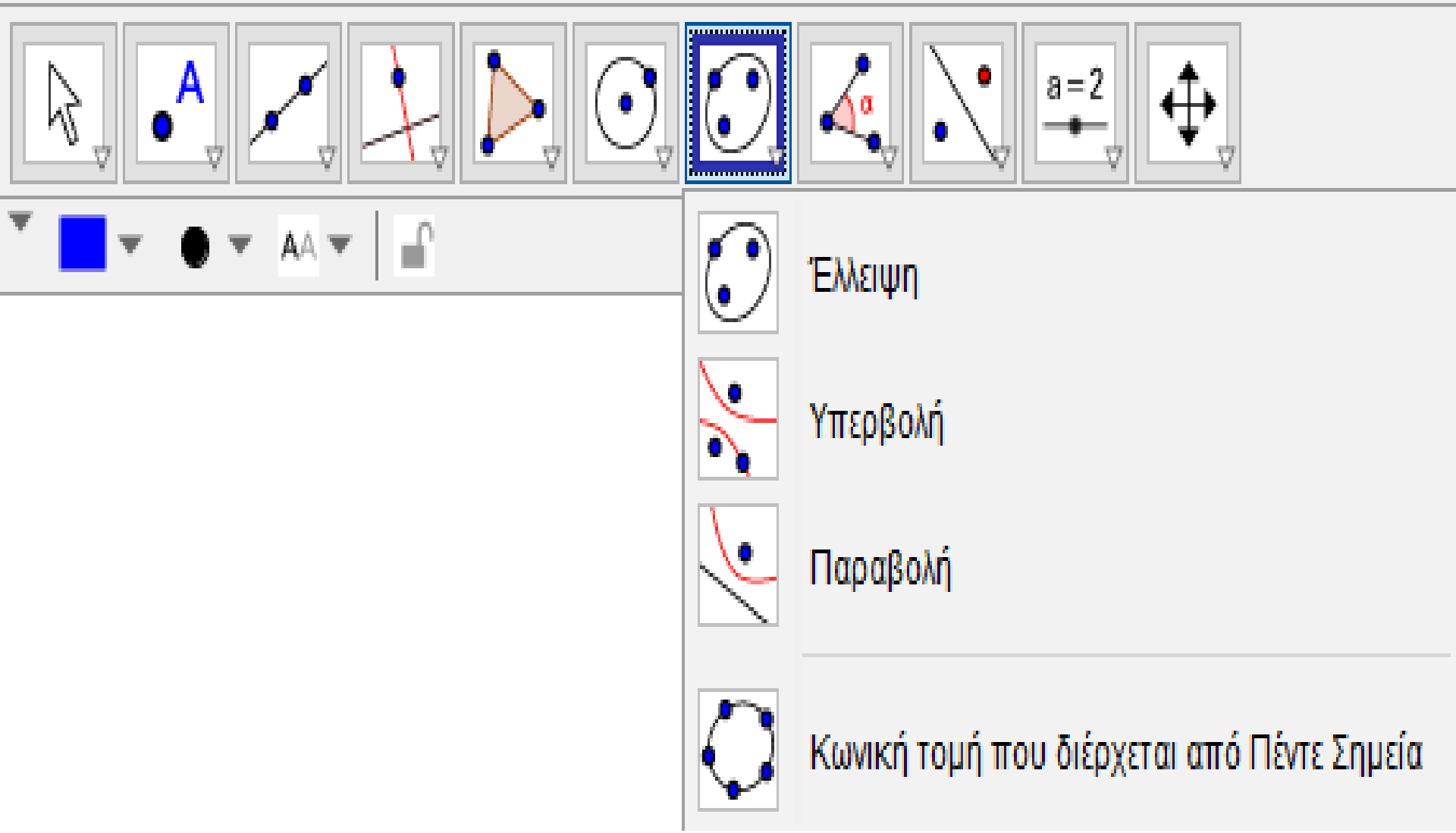
GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



GeoGebra

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



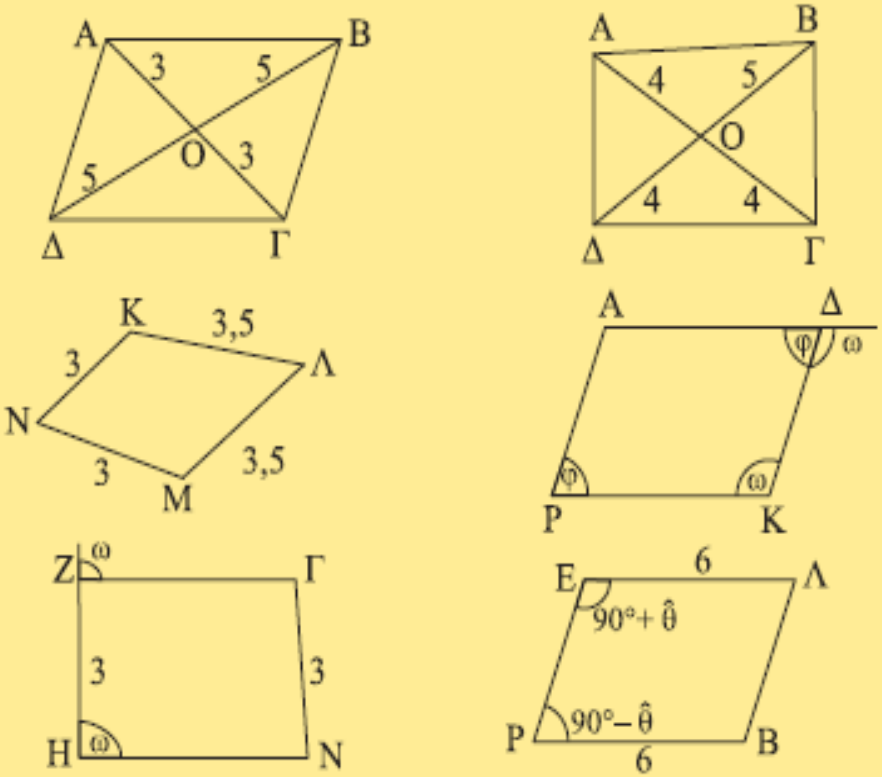
Ιδέες για να εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητες του Geogebra στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

- Κατασκευή ιδανικών σχημάτων ασκήσεων βιβλίου και μεταφορά σε φύλλο εργασίας …
- Επίλυση ασκήσεων με υποδείξεις, βοηθητικές γραμμές, απόκρυψη περιττών γραμμών – αφαίρεση …
- Μετασχηματισμός σχήματος – ειδικές καταστάσεις που μπορεί να αλλάζουν τα συμπεράσματα …
- Έλεγχος ορθότητας άσκησης …
- Μετατροπή – επέκταση – συμπλήρωση άσκησης , ή και αλλαγή σε πιο ανοικτό θέμα …
- Μετρήσεις, εικασίες, …
- Προτείνετε και εσείς άλλα …

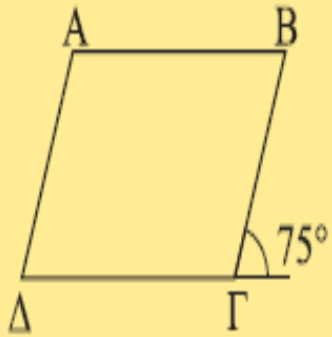
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου Γεωμετρίας
Κεφάλαιο 5 - Παραλληλόγραμμα

Ερωτήσεις Κατανόησης

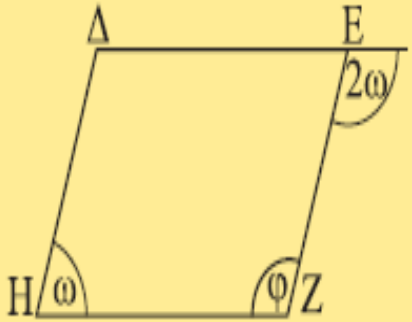
1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*



3. *Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.*



4. *Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.*



Σε ποιο επίπεδο van Hiele τις κατατάσσετε;

Δημιουργείστε δραστηριότητες με το Geogebra που θα βοηθήσουν τους μαθητές στην κατανόηση της θεωρίας και στην επίλυση ασκήσεων που επιλέξατε …

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της* $\hat{A}$ *τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.*

2. *Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, ώστε ΟΕ = ΟΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ//ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.*

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΗ = ΑΖ,
ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

5. *Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.*

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι
i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.

5. Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

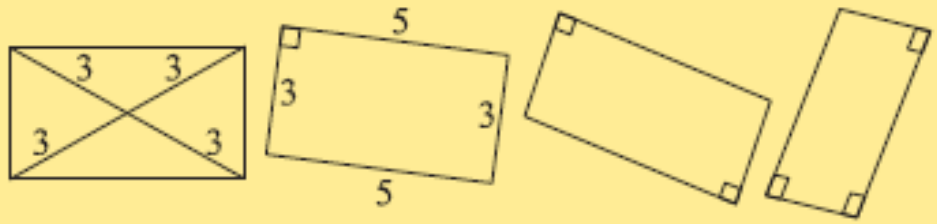
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι*

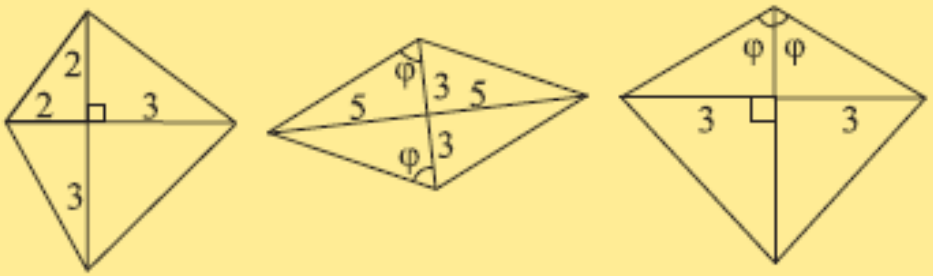
i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα,

ποια όχι και γιατί;

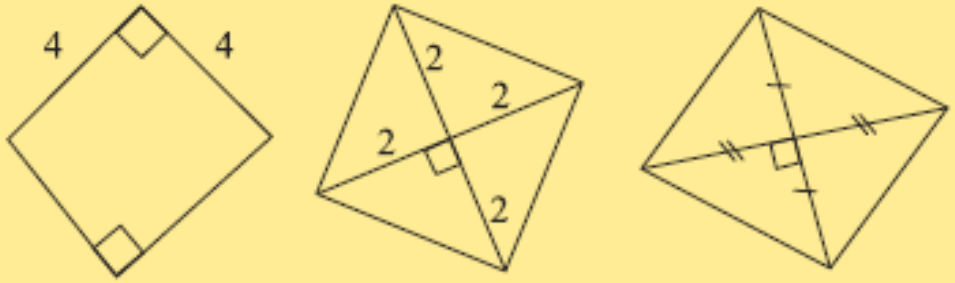
i)



ii)



iii)



3. *Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;*

i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. *Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:*

i) Τετράγωνο – Ρόμβος ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο

iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ⊥ΔΓ και ΓΖ⊥ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*

6. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*

i) ΑΖ = ΔΕ, *ii) ΑΖ⊥ΔΕ.*

3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*

4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με* $\hat{B} = 45°$. *Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.*

2. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε* $BE \perp AΓ$. *Αν η διχοτόμος της γωνίας* $\Delta\hat{B}E$ *τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι* $BΓ = ΓZ$.

3. *Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).*