

ΠΟΣΟΣΤΑ

Τι πρέπει να θυμάμαι:

Ένα ποσοστό επί τοις εκατό, συμβολίζεται με το σύμβολο (%) και είναι ένα **δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100**. Θυμάμαι ότι δεκαδικά λέω τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή το 10, το 100, το 1000 κ.ο.κ., κάποια δηλαδή δύναμη του 10. Αντίστοιχα ένα ποσοστό επί τοις χιλίοις, συμβολίζεται με το σύμβολο (‰) και είναι ένα δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 1000.

Ακριβώς επειδή το ποσοστό είναι κλάσμα, εκφράζει και αυτό ένα «μέρος» κάποιου «όλου», ή ένα «μερίδιο» μιας «συνολικής ποσότητας» ή ένα «τμήμα» ενός «ακέραιου μεγέθους» κλπ.

Λέμε για παράδειγμα $\frac{3}{5}$ της πίτσας και αναφερόμαστε στα τρία από τα πέντε ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί (κοπεί) η πίτσα. Από την ισοδυναμία κλασμάτων έχουμε μάθει ότι υπάρχουν πολλοί «ισοδύναμοι» τρόποι να πούμε ότι μας «λέει» και το κλάσμα $\frac{3}{5}$. Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{6}{10}$ μας μιλά για την ίδια ποσότητα πίτσας, για το ίδιο συνολικό μέρος της πίτσας, με εκείνο για το οποίο μας μιλά το ισοδύναμο του κλάσμα $\frac{3}{5}$. Για παράδειγμα, όλα τα ακόλουθα κλάσματα είναι ισοδύναμα :

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \dots = \frac{60}{100}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο κλάσμα, το $\frac{60}{100}$, μας μιλά για την περίπτωση εκείνη όπου η πίτσα μας χωρίστηκε σε 100 ίσα μέρη και εμείς φάγαμε τα 60 από αυτά. Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι φάγαμε **το 60 επί τοις εκατό της πίτσας ή απλά το 60% της πίτσας**. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι, σαν ποσότητα, κάποιος που έφαγε το 60% της πίτσας, δηλαδή τα $\frac{60}{100}$ της πίτσας, έφαγε ίση ποσότητα με εκείνον που έφαγε τα $\frac{3}{5}$ της πίτσας ή με εκείνον που έφαγε τα $\frac{9}{15}$ της πίτσας.

Γιατί μας είναι απαραίτητα τα ποσοστά;

Τα ποσοστά μας είναι απαραίτητα για να εκφράσουμε **με ομοιόμορφο τρόπο** τη σχέση που έχει ένα «μέρος» με το «όλο» του, το «μερίδιο» με τη «συνολική ποσότητα» από την οποία αποσπάστηκε, το «τμήμα» με το «ακέραιο μέγεθος» από το οποίο αποκόπηκε.

Ακόμα και αν μιλάμε δηλαδή για διαφορετικές συνολικές ποσότητες, όταν χρησιμοποιούμε τα ποσοστά τις φανταζόμαστε να έχουν όλες χωριστεί σε 100 ίσα μέρη και εκφράζουμε κάθε «μερίδιο» ως το δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100 (ή το 1000, αν μιλάμε για ποσοστό επί τοις χιλίοις).

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Θα θέλαμε να απαντήσουμε στο ερώτημα: Σε ποιο από τα δύο παιδιά, τον Νίκο και τη Μαρία, αρέσουν περισσότερο τα πορτοκάλια;

Ο Νίκος πήγε στη λαϊκή και αγόρασε 8 κιλά φρούτα. Από αυτά τα 2 κιλά ήταν πορτοκάλια, τα 3 κιλά ήταν μήλα, άλλα 2 κιλά ήταν αχλάδια και ένα κιλό ήταν φράουλες.

Ποιο είναι στην περίπτωση του Νίκου το «όλον» ή «συνολική ποσότητα»;

-Είναι τα 8 κιλά φρούτων.

Ποιο είναι το «μέρος» ή «μερίδιο» ή «τμήμα» που αντιστοιχεί στα πορτοκάλια;

-Αν το γράψουμε σαν κλάσμα είναι το $\frac{2}{8}$

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση της Μαρίας, η οποία πήγε και εκείνη στη λαϊκή και αγόρασε 12 κιλά φρούτα, εκ των οποίων 3 κιλά ήταν πορτοκάλια, 4 κιλά ήταν μήλα και 5 κιλά ήταν το βάρος ενός καρπουζιού.

Ποιο είναι στην περίπτωση της Μαρίας το «όλον» ή «συνολική ποσότητα»;

-Είναι τα 12 κιλά φρούτων.

Ποιο είναι το «μέρος» ή «μερίδιο» ή «τμήμα» που αντιστοιχεί στα πορτοκάλια;

-Αν το γράψουμε σαν κλάσμα είναι το $\frac{3}{12}$.

Για να δούμε τώρα αν μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα σε ποιον αρέσουν περισσότερο τα πορτοκάλια.

Κάποιος βιαστικός, ο Δημήτρης, μπορεί να πει ότι εφόσον η Μαρία αγόρασε 3 κιλά πορτοκάλια ενώ ο Νίκος 2 κιλά, η Μαρία είναι εκείνη που προτιμά περισσότερο τα πορτοκάλια. Γιατί είναι λανθασμένη αυτή η εκτίμηση; Επειδή δεν παρουσιάζει με «ομοιόμορφο» τρόπο τις προτιμήσεις των δύο παιδιών στα πορτοκάλια. Τι θα πει όμως αυτό;

Η Ελένη ζητά από τον Δημήτρη να ξανασκεφτεί τη βιαστική του απάντηση και του προτείνει να συγκρίνει τα δύο κλάσματα που εκφράζουν τις αγορές των πορτοκαλιών στις δύο περιπτώσεις. Για να το δούμε:

Πορτοκάλια Νίκου ως μέρος των συνολικών φρούτων που αγόρασε	Πορτοκάλια Μαρίας ως μέρος των συνολικών φρούτων που αγόρασε
$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$

Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα. Θα μπορούσαμε να τα κάνουμε ομώνυμα με παρονομαστή το Ε.Κ.Π των παρονομαστών, δηλαδή το 24. Σε μία τέτοια περίπτωση, θα είχαμε να συγκρίνουμε τα ακόλουθα κλάσματα:

Πορτοκάλια Νίκου ως μέρος των συνολικών φρούτων που αγόρασε	Πορτοκάλια Μαρίας ως μέρος των συνολικών φρούτων που αγόρασε
$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24}$

Τι προκύπτει; Προκύπτει ότι τα δύο κλάσματα είναι ίσα. Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι αν και τα δύο παιδιά αποφάσιζαν να αγοράσουν 24 κιλά φρούτα, επειδή για παράδειγμα είχαν να διαθέσουν ακριβώς τα ίδια χρήματα, και τα δύο παιδιά θα αγόραζαν ίσες ποσότητες πορτοκαλιών. Άρα πράγματι βιάστηκε ο Δημήτρης. Στα δύο παιδιά αρέσουν εξίσου τα πορτοκάλια.

Ωραία αλλά τι σχέση έχουν τα ποσοστά με όλα αυτά;

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα, αλλά όχι με παρονομαστή το ΕΚΠ, αλλά τον αριθμό 100. Ας το δούμε:

Θέλω να μετατρέψω το $\frac{2}{8}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100. Θα πρέπει να πολλαπλασιάσω

αριθμητή και παρονομαστή με τον αριθμό 100:8. Σκέφτομαι δηλαδή «με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιαστεί το 8 για να δώσει 100;» ή «πόσες φορές πιο μεγάλο είναι το 100 από το 8;»

100:8 μας κάνει 12,5. Οπότε $\frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 12,5}{8 \cdot 12,5} = \frac{25}{100}$. Τι μας λέει αυτή ισοδυναμία; Μας λέει ότι αν ο Νίκος

που αγόρασε 8 κιλά φρούτων εκ των οποίων 2 κιλά ήταν πορτοκάλια, είχε χρήματα για να αγοράσει 100 κιλά φρούτων, τότε θα αγόραζε 25 κιλά πορτοκαλιών. Γιατί; Μα επειδή είναι λογικό να σκεφτούμε ότι η προτίμηση του για τα πορτοκάλια δεν αλλάζει, αλλά παραμένει σταθερή. Εκείνο που αλλάζει είναι ενδεχομένως τα χρήματα που έχει κάθε φορά να διαθέσει για φρούτα.

Όμοια, στην περίπτωση της Μαρίας, αν κάναμε το δικό της κλάσμα των πορτοκαλιών ομώνυμο με κάποιο ισοδύναμο με παρονομαστή το 100, θα λέγαμε:

Θέλω να μετατρέψω το $\frac{3}{12}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100. Θα πρέπει να πολλαπλασιάσω

αριθμητή και παρονομαστή με τον αριθμό 100:12. Σκέφτομαι δηλαδή «με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιαστεί το 12 για να δώσει 100;» ή «πόσες φορές πιο μεγάλο είναι το 100 από το 12;»

100:12 μας κάνει 8,33... Οπότε $\frac{3}{12} = \frac{3 \cdot 8,33..}{12 \cdot 8,33..} = \frac{25}{100}$. Τι μας λέει αυτή ισοδυναμία; Μας λέει ότι αν η

Μαρία που αγόρασε 12 κιλά φρούτων εκ των οποίων 3 κιλά ήταν πορτοκάλια, είχε λεφτά για να

αγοράσει 100 κιλά φρούτων, τότε θα αγόραζε 25 κιλά πορτοκαλιών. Γιατί; Μα επειδή, όπως και ο Νίκος, η προτίμηση της για τα πορτοκάλια δεν αλλάζει, αλλά παραμένει σταθερή. Εκείνο που αλλάζει είναι ενδεχομένως τα χρήματα που έχει κάθε φορά να διαθέσει για φρούτα.

Θυμίζουμε ότι υπάρχει και άλλος τρόπος για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό. Κάνουμε τη διαίρεση Αριθμητής:Παρονομαστής και προκύπτει δεκαδικός αριθμός, τον οποίο στη συνέχεια γράφουμε ως δεκαδικό κλάσμα.

Στην περίπτωση του Νίκου, θα είχαμε: $\frac{2}{8} = 2 : 8 = 0,25 = \frac{25}{100}$

Στην περίπτωση της Μαρίας, θα είχαμε: $\frac{3}{12} = 3 : 12 = 0,25 = \frac{25}{100}$

Συμπέρασμα:

Επειδή λοιπόν δεν υπήρχε «ομοιομορφία» στην παρουσίαση των μεριδίων των πορτοκαλιών των δύο παιδιών, αποφασίσαμε να δημιουργήσουμε αυτήν την «ομοιομορφία», **υποθέτοντας** ότι και τα δύο παιδιά αγόρασαν 100 κιλά φρούτα. Τι διαπιστώσαμε; Διαπιστώσαμε ότι είναι εύκολο πλέον να συγκρίνουμε τις προτιμήσεις τους. Μάλιστα είδαμε ότι προτιμούν εξίσου τα πορτοκάλια. 25 κιλά πορτοκάλια θα αγόραζαν και οι δύο, αν είχαν αγοράσει 100 κιλά φρούτων ο καθένας. **Δηλαδή σε κάθε αγορά φρούτων που κάνουν τα παιδιά, αγοράζουν 25% πορτοκάλια.** Αυτή είναι η προτίμησή τους στο φρούτο αυτό.

Παρατηρεί ο Παύλος:

-«Μα το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε συγκρίνοντας τα ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή το ΕΚΠ...»

Σωστά, και θα είχαμε απόλυτο δίκιο. Ωστόσο θα μπορούσε να συμβεί και το εξής. Έστω ότι και τα 20 παιδιά της τάξης πήγαν στη λαϊκή και αγόρασαν φρούτα και ο δάσκαλος ρωτά να μάθει ποιος προτιμά περισσότερο τα πορτοκάλια. Και στη συνέχεια και μία ακόμη τάξη έκανε το ίδιο, με άλλους 30 μαθητές. Και μία άλλη τάξη στην Κοζάνη με 25 μαθητές και ακόμη μία κάπου στην Αθήνα με 22 μαθητές. Ο δάσκαλος θέλει να συγκρίνουμε τις προτιμήσεις σε πορτοκάλια, όλων των παιδιών από όλες αυτές τις τάξεις. Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε;

Ξεκινώντας από τη δική μας τάξη, θα μπορούσαμε να κάνουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα βρίσκοντας το ΕΚΠ των 20 παρονομαστών ή θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε όλα τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100, βρίσκοντας στην ουσία τα ποσοστά επί τοις εκατό (%) για την προτίμηση του κάθε παιδιού στα πορτοκάλια. Στη συνέχεια, για τις άλλες τάξεις, είτε θα ζητούσαμε τα δεδομένα τους και θα βρίσκαμε το νέο Ε.Κ.Π (πράγμα που θα μας έβαζε πάλι σε νέο κόπο) ή θα ζητούσαμε από τα παιδιά των τάξεων αυτών να υπολογίσουν τις προτιμήσεις τους ως ομώνυμα κλάσματα με παρονομαστή το 100, θα ζητούσαμε δηλαδή τις προτιμήσεις τους επί τοις εκατό στα πορτοκάλια και θα συγκρίναμε εκείνες με τις δικές μας. Η χρήση των ποσοστών παντού μοιάζει

ευκολότερη για τη μεταξύ μας συνεννόηση, έτσι δεν είναι; Δεν θα κάνει τη σύγκριση των προτιμήσεών μας πιο εύκολη;

Η γενική αυτή συμφωνία όλων μας να χρησιμοποιούμε την περίπτωση του 100 ως κοινού παρονομαστή, οδήγησε στην επικράτηση των εκατοστιαίων ποσοστών ως τη μέθοδο που προτιμάται για να πετύχουμε την «ομοιομορφία».

Τα ποσοστά μας είναι εξίσου χρήσιμα και στην αποτύπωση και μελέτη μεταβολών (αυξήσεων ή μειώσεων) μεγεθών. Λέμε για παράδειγμα ότι ο πληθυσμός της Γης θα έχει αυξηθεί κατά 50% σε 100 χρόνια ή ότι το εισόδημα της Ελληνικής οικογένειας μειώθηκε κατά 25% στην περίοδο της κρίσης.

Γενικά, είναι δύσκολο να καταγραφούν εδώ όλες οι περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται ποσοστά. Αρκεί μόνο να αναλογιστεί κανείς ότι γύρω του καθημερινά, δεκάδες πληροφορίες έχουν τη μορφή ποσοστού. Όπως μας θυμίζει και η δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου, σίγουρα έχουμε ξανακούσει τις ακόλουθες φράσεις-προτάσεις:

- Πήρε αύξηση 14%.
- Οι γεννήσεις μειώνονται, κατά 12%, το χρόνο.
- Με συστηματική προπόνηση, ένας δρομέας αύξησε την απόδοσή του κατά 20%.
- Ένα μαγαζί έκανε εκπτώσεις 60%.
- Η ευρύτερη περιοχή της Αθήνας καταλαμβάνει το 3% της έκτασης της Ελλάδας και εκεί κατοικεί το 45% του πληθυσμού της Ελλάδας.
- Το 40% των υποψηφίων έγραψαν πολύ καλά και το 35% κάτω από τη βάση.
- Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) 19%.
- Ειδικός Φόρος Κατανάλωσης 5%.
- Παρακράτηση φόρου 22%.
- Επιτόκιο Καταθέσεων Ταμιευτηρίου 9,5%.
- Το 25% του πληθυσμού έχει πάνω από 2 αυτοκίνητα.
- Μόνο το 4% των οικογενειών έχει πάνω από 4 παιδιά.
- Είναι 100% σίγουρο, ότι θα βρέξει.
- Η πιθανότητα να συμβεί (ένα γεγονός) είναι 1%.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα

Στην τάξη της Μαρίας υπάρχουν 25 μαθητές εκ των οποίων οι 10 είναι κορίτσια. Στην τάξη της Έλενας υπάρχουν 21 μαθητές εκ των οποίων οι 14 είναι κορίτσια. Στην τάξη της Δήμητρας υπάρχουν 12 μαθητές εκ των οποίων 8 είναι κορίτσια.

A) Σε ποια από τις τρεις τάξεις υπάρχουν τα περισσότερα κορίτσια;

B) Σε ποια από τις τρεις τάξεις υπάρχουν τα περισσότερα κορίτσια **σε σχέση με το σύνολο των μαθητών της τάξης**;

A) Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι απλή. Ας εξετάσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Τάξη	Κορίτσια
Μαρίας	10
Έλενας	14
Δήμητρας	8

Τα περισσότερα κορίτσια βρίσκονται στην τάξη της Έλενας και είναι 14. Τα λιγότερα κορίτσια βρίσκονται στην τάξη της Δήμητρας και είναι 8.

B) Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα δεν είναι το ίδιο απλή. Μας ρωτά σε ποια τάξη υπάρχουν τα περισσότερα κορίτσια **σε σχέση με το σύνολο των μαθητών** της τάξης. Εδώ θα χρειαστούμε τη βοήθεια των εκατοστιαίων ποσοστών για να δημιουργήσουμε την «ομοιομορφία» που μας είναι απαραίτητη στη σύγκριση.

Ας δούμε αρχικά τα κλάσματα που αναπαριστούν το μερίδιο των κοριτσιών στο σύνολο των μαθητών της κάθε τάξης:

Τάξη	Μέρος των μαθητών της τάξης που είναι κορίτσια
Μαρίας	$\frac{10}{25}$
Έλενας	$\frac{7}{21}$
Δήμητρας	$\frac{8}{12}$

Ας συγκρίνουμε τα κλάσματα τώρα. Ας τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα με δύο τρόπους. Πρώτα, σαν άσκηση επανάληψης, ας τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα με παρονομαστή το Ε.Κ.Π των παρονομαστών. Στη συνέχεια ας τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα δεκαδικά κλάσματα με παρονομαστή το 100, δηλαδή σε ποσοστά επί τοις εκατό. Πάμε:

Το Ε.Κ.Π. των αριθμών 25, 21 και 12 θα το υπολογίσω αφού πρώτα γράψω τους αριθμούς αυτούς σαν γινόμενα πρώτων παραγόντων:

$$25 = 5 \cdot 5 = 5^2$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

Θυμάμαι ότι το **Ε.Κ.Π** είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών όρων των τριών γινομένων, με τους όρους αυτούς στην υψηλότερη δύναμη στην οποία εμφανίζονται στα γινόμενα αυτά. Οπότε:

-Από το πρώτο γινόμενο παίρνουμε το 5^2 .

-Από το δεύτερο γινόμενο παίρνουμε το 3 και το 7.

-Από το τρίτο γινόμενο παίρνουμε μόνο το 2^2 , καθώς το 3 το πήραμε ήδη.

Οπότε σχηματίζουμε το γινόμενο του Ε.Κ.Π ως εξής:

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 5^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 25 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 = 2100$$

Ας κάνουμε τώρα τα κλάσματα ομώνυμα:

Τα $\frac{10}{25}, \frac{7}{21}, \frac{8}{12}$ θα γίνουν ομώνυμα υπολογίζοντας τα γνωστά μας «καπελάκια» που προκύπτουν αν

διαιρέσουμε το Ε.Κ.Π με τον κάθε παρονομαστή:

$$\underline{2100:25} \quad \underline{2100:21} \quad \underline{2100:12} \qquad \underline{84} \quad \underline{100} \quad \underline{175}$$

$$\frac{10}{25}, \quad \frac{7}{21}, \quad \frac{8}{12} \quad \text{ή} \quad \frac{10}{25}, \frac{7}{21}, \frac{8}{12} \quad \text{ή} \quad \frac{840}{2100}, \frac{700}{2100}, \frac{1400}{2100}$$

Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο κλάσμα είναι το $\frac{1400}{2100}$ που αντιστοιχεί στο ισόδυναμό του $\frac{8}{12}$, το

οποίο είναι το κλάσμα που εκφράζει το μερίδιο των κοριτσιών στην τάξη της Δήμητρας. Έτσι, **αν και στην τάξη της Δήμητρας υπάρχουν τα λιγότερα κορίτσια, στην τάξη αυτή ο αριθμός των κοριτσιών σε σχέση με το σύνολο των μαθητών της τάξης είναι ο μεγαλύτερος.** Εδώ δηλαδή **τα κορίτσια καταλαμβάνουν μεγαλύτερο κομμάτι της τάξης σε σχέση με τις άλλες δύο τάξεις.**

Πάμε τώρα να δούμε πως θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα, χρησιμοποιώντας εκατοστιαία ποσοστά. Θα μετατρέψουμε κάθε κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό:

Τάξη	Μέρος των μαθητών της τάξης που είναι κορίτσια	Δεκαδικός αριθμός που προκύπτει από τη διαίρεση Αριθμητή:Παρονομαστή	Ισοδύναμο Δεκαδικό κλάσμα
Μαρίας	$\frac{10}{25}$	0,25	$\frac{25}{100}$
Έλενας	$\frac{7}{21}$	0,333333...	$\frac{33,3333...}{100}$
Δήμητρας	$\frac{8}{12}$	0,666666...	$\frac{66,6666...}{100}$

Οπότε τώρα έχουμε να συγκρίνουμε τα τρία δεκαδικά κλάσματα με παρονομαστή το 100, δηλαδή τα τρία ποσοστά επί τοις εκατό (ή εκατοστιαία ποσοστά):

$$\frac{25}{100}, \frac{33,333...}{100}, \frac{66,666...}{100} \quad \text{ή} \quad 25\%, 33,33\%., 66,66\%.$$

Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό είναι το 66,66..% που αντιστοιχεί στο κλάσμα $\frac{8}{12}$ το οποίο είναι το κλάσμα που εκφράζει το μερίδιο των κοριτσιών στην τάξη της Δήμητρας.

Αν τώρα έπρεπε να συγκρίνω τα δεδομένα από όλες τις τάξεις της Ελλάδας; Τότε σίγουρα θα ήθελα τη βοήθεια ενός συμμαθητή μου από κάθε σχολείο. Για να δουλεύουμε με την ίδια μέθοδο και να παράγουμε «ομοιόμορφες» πληροφορίες που είναι άμεσα και εύκολα συγκρίσιμες, θα συμφωνούσαμε να παρουσιάζουμε τις πληροφορίες αυτές σαν ποσοστά επί τοις εκατό. Έτσι για παράδειγμα θα έβγαινε «πρωταθλήτρια» σε κορίτσια μία τάξη με 5 μαθητές εκ των οποίων 4 είναι κορίτσια και ποσοστό κοριτσιών 80%, ενώ τελευταία με ποσοστό 25% θα έβγαινε μία τάξη με 32 μαθητές εκ των οποίων 8 είναι κορίτσια.

Τα ποσοστά μας βοήθησαν να «μιλήσουμε την ίδια γλώσσα». Υποθέσαμε όλοι ότι οι τάξεις μας έχουν 100 παιδιά και αυτό έκανε τη σύγκριση τους ευκολότερη.

Πώς αντιμετωπίζω ασκήσεις και προβλήματα με ποσοστά;

Μιλώντας γενικά, μπορούμε να πούμε ότι κάθε πρόβλημα που περιλαμβάνει ποσοστά μπορεί να ανήκει σε μία από τρεις γενικές κατηγορίες ή μπορεί να αναχθεί σε μία από αυτές. Στην πρώτη, το πρόβλημα μου **δίνει τα ποσά (ολικό και μερικό) και μου ζητά το ποσοστό**. Στη δεύτερη, το πρόβλημα **δίνει το ποσοστό και το ολικό ποσό και ζητά το μερικό ποσό**. Στην τρίτη, το πρόβλημα **δίνει το μερικό ποσό και το ποσοστό του και ζητά το ολικό ποσό**.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 1	ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 2
<p>Γνωρίζω τα ποσά (ολικό και μερικό), ψάχνω το ποσοστό Ποσό → Ποσοστό %</p>	<p>Γνωρίζω το ποσοστό και το ολικό ποσό, ψάχνω το μερικό ποσό. Ποσοστό % → Ποσό</p>
<p>Η πράξη που κάνω είναι η ΔΙΑΙΡΕΣΗ</p>	<p>Η πράξη που κάνω είναι ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ</p>
$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Μερικό_Ποσό}}{\text{Ολικό_Ποσό}}$ <p>Αυτή η διαίρεση δίνει το ποσοστό εκφρασμένο σαν δεκαδικό αριθμό.</p> <p>Για να το εκφράσουμε σαν ποσοστό επί τοις εκατό, μετατρέπουμε τον δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100 ή απλά πολλαπλασιάζουμε τον δεκαδικό με το 100 και γράφουμε το σύμβολο % δίπλα του.</p>	$\text{Μερικό_Ποσό} = \text{Ποσοστό} \cdot \text{Ολικό_Ποσό}$
<p>Παράδειγμα 1</p>	<p>Παράδειγμα 2</p>
<p>Γνωρίζω:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Το εισόδημά μου είναι 8000€ (ολικό ποσό) - Ο φόρος που πλήρωσα για αυτό είναι 500€. (μερικό ποσό) <p>Ψάχνω: το ποσοστό % του φόρου</p> $\text{Ποσοστό\% του Φόρου} = \frac{\text{Ποσό Φόρου}}{\text{Εισόδημα}}$ $= \frac{500}{8000} = 0,0625$ <p>Το ποσοστό είναι εκφρασμένο σαν δεκαδικός αριθμός. Τον μετατρέπω σε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100. Πώς; Τον πολλαπλασιάζω και τον διαιρώ με το 100:</p> $0,0625 = 0,0625 \cdot \frac{100}{100} = \frac{0,0625 \cdot 100}{100} = \frac{6,25}{100} = 6,25\%$ <p>ή απλά τον πολλαπλασιάζω με 100 και βάζω δίπλα του το σύμβολο % Ποσοστό% = 0,0625 · 100 = 6,25%</p>	<p>Γνωρίζω:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Το εισόδημά μου είναι 8000€ (ολικό ποσό) - Ο φόρος που πλήρωσα είναι το 6,25% του εισοδήματός μου (ποσοστό) $\text{Ποσό Φόρου} = \text{Ποσοστό\% του Φόρου} \cdot \text{Εισόδημα}$ $= 6,25\% \cdot 8000 = \frac{6,25}{100} \cdot 8000 =$ $= \frac{6,25 \cdot 8000}{100} = \frac{50000}{100} = 500$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 3

Γνωρίζω το μερικό ποσό και το ποσοστό του, ψάχνω το ολικό ποσό.

Μερικό Ποσό και Ποσοστό % → Ολικό Ποσό

Όταν γνωρίζω το μερικό ποσό και το ποσοστό του, τότε μπορώ να βρω το ολικό ποσό με ΔΙΑΙΡΕΣΗ του μερικού ποσού με το ποσοστό.

$$\text{Μερικό Ποσό} = \text{Ποσοστό\%} \cdot \text{Ολικό Ποσό}$$

οπότε

$$\text{Ολικό Ποσό} = \frac{\text{Μερικό Ποσό}}{\text{Ποσοστό\%}}$$

Στο παράδειγμα με τον φόρο:

Εδώ γνωρίζουμε το μερικό ποσό και το ποσοστό του και ψάχνουμε το ολικό ποσό.

Γνωρίζω:

- Ο φόρος που πλήρωσα είναι 500€ (μερικό ποσό)
- Ο φόρος που πλήρωσα είναι το 6,25% του εισοδήματός μου (ποσοστό)

Ψάχνω: το εισόδημά μου (ολικό ποσό)

Γνωρίζω ότι:

$$\text{Ποσό Φόρου} = \text{Ποσοστό\% του Φόρου} \cdot \text{Εισόδημα}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \text{Εισόδημα} &= \frac{\text{Ποσό Φόρου}}{\text{Ποσοστό\% του Φόρου}} = \\ &= \frac{500}{6,25\%} = \frac{500}{\frac{6,25}{100}} = \frac{500 \cdot 100}{6,25} = \frac{50000}{6,25} = 8000\text{€} \end{aligned}$$

Παραδείγματα βιβλίου – Βοήθεια- Διευκρινίσεις

Παράδειγμα 1 του βιβλίου στη σελίδα 82

Το παράδειγμα 1 ανήκει στη δεύτερη κατηγορία. Είναι ένα δύσκολο για τους μαθητές πρόβλημα καθώς υπάρχουν δεδομένα τα οποία οι μαθητές συνήθως αγνοούν λόγω απειρίας και μη ανάμειξης με τις διαδικασίες είσπραξης και απόδοσης ΦΠΑ. Ας το δούμε πιο προσεκτικά.

Γνωρίζουμε το συνολικό ποσό που έχει δηλωθεί σαν εισόδημα και γνωρίζουμε το ποσοστό του φόρου Φ.Π.Α. που είναι 19%. Δηλαδή **αν ένας πελάτης του ηλεκτρολόγου πληρώσει 100€ για κάποια εργασία, θα επιβαρυνθεί με επιπλέον 19€ τα οποία θα τα πάρει ο ηλεκτρολόγος, θα θεωρηθούν έσοδά του, αλλά δεν θα τα κρατήσει ως εισόδημα. Θα τα επιστρέψει στην εφορία.** Απλά δηλαδή η εφορία ζητά από τον ηλεκτρολόγο να της «φυλάξει» τα χρήματα αυτά και να της τα δώσει στο τέλος του μήνα, για λόγους ευκολίας, επειδή είναι αδύνατον κάποιος υπάλληλός της να βρίσκεται κάθε στιγμή εκεί για να πάρει τα χρήματα του φόρου.

Η δυσκολία στο πρόβλημα αυτό λοιπόν εντοπίζεται στο ότι ο ΦΠΑ είναι ένας φόρος που παρακρατείται από τον ηλεκτρολόγο σε κάθε συναλλαγή του με τον πελάτη και στη συνέχεια αποδίδεται στην εφορία. Άρα θα πρέπει να γίνει σαφές ότι το καθαρό εισόδημα του ηλεκτρολόγου δεν είναι τα 2856€. Αυτά είναι τα έσοδά του, στα οποία περιλαμβάνεται και ο φόρος ΦΠΑ που εισέπραξε αλλά δεν του ανήκει και αποδίδεται στην εφορία.

Οπότε πώς σκεφτόμαστε;

Ξέρουμε ότι το ποσοστό του ΦΠΑ είναι 19%. Αυτό σημαίνει ότι αν ο ηλεκτρολόγος είχε μόνο έναν πελάτη με τον οποίο είχε μία μόνο συναλλαγή των 100€, θα του ζητούσε επιπλέον 19€ ως φόρο ΦΠΑ για να τα αποδώσει στην εφορία. Οπότε στα χέρια του ηλεκτρολόγου θα έφταναν 119€ ως ΕΣΟΔΑ (όχι ως εισόδημά του). Οπότε

Στα 119€ εσόδων	19€ είναι ο οφειλόμενος φόρος ΦΠΑ	δηλαδή ένα κλάσμα $\frac{19}{119}$ είναι το μερίδιο του φόρου ΦΠΑ	ή σαν δεκαδικός 0,1596638655462185...	ή σαν δεκαδικό κλάσμα περίπου $\frac{15,96...}{100}$	ή σαν ποσοστό επί τοις εκατό 15,96%
Στα 2856€ εσόδων λοιπόν	Πόσο (x;) θα είναι ο οφειλόμενος φόρος ΦΠΑ;				

Από την απλή μέθοδο των τριών που γνωρίζουμε από το Δημοτικό, υπολογίζουμε $x = \frac{2856 \cdot 19}{119} = 456\text{€}$,

το οποίο ωστόσο θα μπορούσε να γραφεί και ως $x = \frac{19}{119} \cdot 2856 = 456\text{€}$.

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα $\frac{19}{119}$ που όπως είδαμε στον παραπάνω πίνακα είναι ισοδύναμο με το εκατοστιαίο ποσοστό 15,96% πολλαπλασιάζεται με το ολικό ποσό. Παρατηρούμε δηλαδή ότι όπως και στην περίπτωση των προβλημάτων της Κατηγορίας 2, έτσι και εδώ γνωρίζουμε το ολικό ποσό (2856€), και ένα κλάσμα, το $\frac{19}{119}$, ισοδύναμο του εκατοστιαίου ποσοστού που αντιστοιχεί στον φόρο ΦΠΑ,

οπότε έχουμε και εδώ το γνωστό μας $\text{Ποσό Φόρου} = \text{Ποσοστό \% του Φόρου} \cdot \text{Έσοδα}$

ή γενικότερα $\text{Μερικό Ποσό} = \text{Ποσοστό} \cdot \text{Ολικό Ποσό}$ της Κατηγορίας 2

Παράδειγμα 2 του βιβλίου στη σελίδα 82

Και το παράδειγμα αυτό ανήκει στην Κατηγορία 2 όπου γνωρίζουμε ολικό ποσό και ποσοστό και ψάχνουμε το μερικό ποσό. Για παράδειγμα στην περίπτωση παπουτσιών γνωρίζουμε το ολικό ποσό 170€, γνωρίζουμε το ποσοστό της έκπτωσης (μείωσης) που θα υποστεί το ποσό αυτό. Ψάχνουμε το μερικό ποσό, το ποσό δηλαδή της έκπτωσης. Οπότε:

$\text{Ποσό Έκπτωσης Παπουτσιών} = \text{Ποσοστό Έκπτωσης Παπουτσιών} \cdot \text{Τιμή Παπουτσιών Πριν Την Έκπτωση}$
ή

$$\text{Ποσό Έκπτωσης Παπουτσιών} = 15\% \cdot 170 = \frac{15}{100} \cdot 170 = 25,50\text{€}$$

Το σημαντικό που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι για καθετί που πωλείται με έκπτωση, υπάρχουν τρεις αριθμοί. Η αρχική τιμή ή τιμή πριν την έκπτωση, το ποσό της έκπτωσης και η τελική τιμή ή τιμή μετά την έκπτωση. Η σχέση τους είναι

$$\text{Τελική Τιμή} = \text{Αρχική Τιμή} - \text{Ποσό Έκπτωσης}$$

ή

$$\text{Τιμή Μετά Την Έκπτωση} = \text{Τιμή Πριν Την Έκπτωση} - \text{Ποσό Έκπτωσης}$$

Οπότε στην περίπτωση των παπουτσιών ισχύει:

$$\text{Τελική Τιμή} = \text{Αρχική Τιμή} - \text{Ποσό Έκπτωσης}$$

ή

$$\text{Τελική Τιμή} = 170 - 25,50 = 144,50\text{€}$$

Παράδειγμα 3 του βιβλίου στη σελίδα 82

Στο παράδειγμα αυτό δουλεύουμε με τις έννοιες του Κεφαλαίου, του Επιτοκίου και του Τόκου.

Ας τις θυμηθούμε:

Κεφάλαιο είναι ένα χρηματικό ποσό το οποίο έχει κάποιος στη διάθεσή του.

Τόκος είναι τα χρήματα που θα πρέπει να πληρώνει κάθε χρόνο κάποιος στον κάτοχο του Κεφαλαίου, αν δανειστεί το Κεφάλαιο.

Επιτόκιο είναι το «κόστος» του χρήματος. Το επιτόκιο είναι ο τόκος που θα πληρώσει κάποιος μετά από ένα χρόνο, αν δανειστεί ένα ποσό 100€. Το επιτόκιο είναι ένα ποσοστό επί τοις εκατό, πχ 5%. Αυτό θα σήμαινε ότι αν κάποιος δανειζόταν 100€ σήμερα με επιτόκιο 5%, σε ένα χρόνο θα έπρεπε να επιστρέψει τα 100€ συν επιπλέον 5€ ως τόκο.

Η σχέση μεταξύ των τριών αυτών μεγεθών είναι:

$$\text{Τόκος} = \text{Κεφάλαιο} \cdot \text{Επιτόκιο}$$

Αν το Κεφάλαιο το διαθέτει ένα πολίτης και το δανείσει στην Τράπεζα τότε το Κεφάλαιο αυτό αποτελεί μία **Κατάθεση** του πολίτη και η Τράπεζα οφείλει να του πληρώνει τόκο σύμφωνα με το επιτόκιο που συμφωνήθηκε.

Αν το Κεφάλαιο το διαθέτει μία Τράπεζα και το δανείσει σε ένα πολίτη τότε το Κεφάλαιο αυτό αποτελεί ένα **Δάνειο** του πολίτη και ο πολίτης οφείλει να πληρώνει στην Τράπεζα τόκο σύμφωνα με το επιτόκιο που συμφωνήθηκε.

Αυτό που προσθέτει το παράδειγμα αυτό στις γνώσεις μας είναι ότι όταν υπολογίζουμε τον τόκο, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τον χρόνο στον οποίο κάνουμε τον υπολογισμό αυτό. Τι σημαίνει αυτό;

- Αν υπολογίσουμε τον τόκο ένα χρόνο μετά τη στιγμή του δανεισμού, τότε θα πληρώσουμε τόκο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του Κεφαλαίου επί ολόκληρο το επιτόκιο.
- Αν υπολογίσουμε όμως τον τόκο μισό χρόνο μετά τη στιγμή του δανεισμού, τότε θα πληρώσουμε τόκο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του Κεφαλαίου επί το μισό του επιτοκίου.
- Αν υπολογίσουμε τον τόκο τρεις μήνες μετά τη στιγμή του δανεισμού, τότε θα πληρώσουμε τόκο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του Κεφαλαίου επί ολόκληρο τα $\frac{3}{12}$ ή το $\frac{1}{4}$ του επιτοκίου .

Κάτι ακόμη που πρέπει να γνωρίζουμε είναι ότι κάθε χρόνο μετά την έναρξη μιας Κατάθεσης και εφόσον αυτή συνεχίζεται, **ο τόκος προστίθεται στο Κεφάλαιο**, με αποτέλεσμα το Κεφάλαιο να αυξάνεται.

Τέλος, κάθε αλλαγή στο κεφάλαιο (προσθήκη ή αφαίρεση χρημάτων), επηρεάζει και τον τόκο. Αν για παράδειγμα καταθέσω στην Τράπεζα 100€ με επιτόκιο 5% και δεν πειράζω καθόλου τα χρήματα μου αυτά, μετά από ένα χρόνο, ο τόκος που μου οφείλει η τράπεζα είναι 5€ και θα προστεθεί στο Κεφάλαιό

μου. Οπότε θα έχω Νέο Κεφάλαιο ίσο με $100+5\text{€}$ δηλαδή 105€ . Την επόμενη χρονιά ο τόκος θα υπολογιστεί με βάση το Νέο Κεφάλαιο.

Αν όμως μετά από μισό χρόνο από τη στιγμή της κατάθεσης, κάνω πάρω 50€ από τα χρήματά μου με μία ανάληψη τότε μετά από ένα χρόνο ο τόκος θα υπολογιστεί για δύο διαστήματα.

Ένα διάστημα των πρώτων έξι μηνών με Κεφάλαιο 100€ , δηλαδή

$$\text{Τόκος}_{\text{Α' έξι μήνηο}} = \text{Κεφάλαιο} \cdot \frac{6}{12} \cdot \text{Επιτόκιο} = 100 \cdot \frac{6}{12} \cdot 5\% = 100 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{100} = 2,5\text{€}$$

Τη στιγμή αυτή λοιπόν, δηλαδή μετά από 6 μήνες, το Νέο Κεφάλαιο είναι

$$\text{ΝέοΚεφάλαιο} = \text{Κεφάλαιο} + \text{Τόκος} \quad \text{ή} \quad \text{ΝέοΚεφάλαιο} = 100 + 2,5\text{€} = 102,5\text{€}$$

Αν κάνω ανάληψη 50€ , τότε το Νέο Κεφάλαιο θα μειωθεί κατά 50€ και θα γίνει $52,5\text{€}$.

Για τους επόμενους έξι μήνες τώρα με Νέο Κεφάλαιο $52,5\text{€}$, θα έχω:

$$\text{Τόκος}_{\text{Β' έξι μήνηο}} = \text{ΝέοΚεφάλαιο} \cdot \frac{6}{12} \cdot \text{Επιτόκιο} = 52,5 \cdot \frac{6}{12} \cdot 5\% = 52,5 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{100} = 1,3125\text{€}$$

Με την ανάληψη των 50€ λοιπόν στους έξι μήνες, μετά από ένα χρόνο θα έχω Νέο Κεφάλαιο $52,5\text{€} + 1,3125\text{€} = 53,8125\text{€}$.

(Στην πράξη το πότε υπολογίζεται ο τόκος εξαρτάται και από άλλους παράγοντες, αλλά αυτό δεν μας απασχολεί στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών)