<u>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</u>

1) Δίνεται η εξίσωση: $3y + 2x = 6$

   α) Μπορεί να λυθεί;

   β) Αν ξέρω ότι $x = 12$ μπορεί να λυθεί (δηλαδή μπορώ να βρω το y);

   γ) Αν $y = 4$ μπορεί να λυθεί (δηλαδή μπορώ να βρω το x);

<u>Συμπέρασμα</u>:
Μια εξίσωση με δύο αγνώστους μπορεί να λυθεί μόνο όταν γνωρίζω έναν από τους δύο αγνώστους. Αν δεν έχω καμιά άλλη πληροφορία μπορώ να δίνω αυθαίρετα τιμές στο x (ή στο y) και να παίρνω τιμές (αντίστοιχες) για το y,έτσι ώστε τα x και y να ικανοποιούν την δοθείσα εξίσωση.
Το σύνολο των λύσεων (x,y) αν παρασταθεί σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θα προκύψει από την ένωση όλων αυτών των σημείων μια ευθεία.
Κάθε σημείο αυτής της ευθείας θα είναι λύση αυτής της εξίσωσης.

<u>Μέθοδοι Λύσης Συστημάτων</u>

2) Ας πάρουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$2x + 3y = 12 \quad (1)$$

$$x + 2y = 4 \quad (2)$$

A) <u>Μέθοδος αντικατάστασης</u>:

Παίρνω την εξίσωση (2) και τη λύνω ως προς x: x = ……..(3)

(Μα γιατί την (2) και όχι τη (1); και γιατί ως προς x και <u>όχι</u> προς y;)

Πάντως εγώ επιλέγω την πιο εύκολη.

Αυτό που βρήκα για το x στην (3) το αντικαθιστώ στην εξίσωση (1)

(4) $2(4-2y)+3y=12$

Η εξίσωση (4) λύνεται ως προς y: y = ……..

(5) $x=-2y+4$

Άρα από την (5) $\begin{cases} y = \ldots\ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ τελική λύση (…,…)

Ξανά $2x+3y=12$ (1)

$x+3y=4$ (2)

B) <u>Μέθοδος αντίθετων συντελεστών:</u>

Πολλαπλασιάζω την (2) με –2

και έχω $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ -2x-4y=-8 \end{array}\right\}$ προσθέτω κατά μέλη

$0\cdot x-1\cdot y=4$ (3)

Τι βρίσκω από την (3); y =……..(4)

Και με το x τι γίνεται;

Πάω πίσω στην (1) ή στην (2)

Αντικαθιστώ αυτό που βρήκα από την (4) π.χ στην (1)

$2x+3(\ldots)=12$.Άρα …. x = …….

τελική λύση (…,…)

(Είναι ίδια όπως προηγουμένως;Αν όχι κάτι ΄΄τρέχει΄΄)

<u>Απορία 1:</u> Με τι πολλαπλασιάζω κάθε φορά;

Ποια εξίσωση;

<u>Απάντηση</u>: Μπορεί την $1^{η}$ μπορεί την $2^{η}$,μπορεί και τις 2 εξισώσεις.

Στόχος η εμφάνιση αντίθετων συντελεστών για κάποιον από τους 2 αγνώστους ώστε με την κατά μέλη πρόσθεση ένας από τους 2 αγνώστους να έχει συντελεστή 0 και η εξίσωση που προκύπτει να έχει 1 μόνο άγνωστο.

Απορία 2: Αν και οι 2 άγνωστοι έχουν συντελεστή 0;

α) $2x+3y=1$

$3x+4{,}5y=6$

β) $2x+5y=3$

$6x+15y=9$

Γ) Μέθοδος Σύγκρισης:

$$2x+3y=12 \quad (1)$$

$$x+2y=4 \quad (2)$$

Λύνω και την (1) και την (2) ως προς x (και γιατί όχι προς y;)

$(1)\rightarrow x=-..... \quad (3)$

$(2)\rightarrow x=....... \quad (4)$

Εξισώνω τις εκφράσεις (3) και (4) $\left[2\alpha \ \ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\right]$

Λύνω ως προς y $\left[y=.....\right]$.Αντικαθιστώ στην (3) (Γιατί όχι στην 4;)

τελική λύση(…,…)

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</u>

α) Επιδιώκω να φέρω το σύστημα στην πιο απλή μορφή.

π.χ $2[x-(4-y)]+20=0$ πράξεις.....

$x+4y=0$

τελικά $\begin{matrix} 2x+2y=-12 \xrightarrow{\cdot 1} 2x+2y=-12 \\ x+4y=0 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x-8y=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$.....

β) Όταν το σύστημα είναι αόριστο:

π.χ $\begin{matrix} 2x-y=4 \xrightarrow{\cdot 2} 4x-2y=8 \\ -4x+2y=-8 \xrightarrow{\cdot 1} \dfrac{-4x+2y=-8}{0\cdot x+0\cdot y=0} \end{matrix}$ (Αόριστη)

τότε και οι 2 εξισώσεις είναι ίδιες.(Δηλαδή στο επίπεδο εκφράζουν την ίδια ευθεία).

Τότε παίρνω τη μία από τις 2 εξισώσεις και .....

(βλέπε 1 εξίσωση με 2 αγνώστους).

γ) Μπορώ επίσης με τις ίδιες μεθόδους να λύσω συστήματα βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου(όπως επίσης με απόλυτες τιμές ή κλασματικές παραστάσεις)κάνοντας κατάλληλες αντικαταστάσεις.

π.χ Να λυθεί το σύστημα :

$$\frac{3}{x-2}+\frac{5}{y+3}=1$$
$$\frac{2}{x-2}-\frac{1}{y+3}=5$$

<u>Λύση</u>:

Γράφω καθαρότερα $3\cdot\frac{1}{x-2}+5\cdot\frac{1}{y+3}=1$

$2\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{y+3}=5$

θέτω $\frac{1}{x-2}=\omega$ και $\frac{1}{y+3}=\delta$ και το σύστημα γίνεται: $\begin{matrix} 3\omega+5\delta=1 \\ 2\omega-\delta=5 \end{matrix}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) $3x-5y=14$

$12x-10y=-8$ $(x=...,\ y=...)$

2) $x-12y=-2$

$3y+5x=53$ $(x=10,\ y=1)$

3) 3x + 4y = 33

5x + 2y = 41 (x = 7,y = 3)

4) 7x + 8y = - 61

\- 3x + 4y = - 11 (x = - 3,y = - 5)

5) 3x + 4y = 23

2x – 7y = - 4 (x = 5,y = 2)

6) x + 7y = 42

y – 3x = 6 (x = 0,y = 6)

7) 4x = 5y + 3

$4y = 5x - 6$ $(x = 2, y = 1)$

8) $2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10$

$4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3$ $(x = \frac{5}{2}, y = 1)$

9) $\frac{x+2}{3} + \frac{y-4}{3} = \frac{5x-y}{4}$

$\frac{2y-x}{4} + \frac{x+y}{6} = x + 1$ $(x = 4, y = 8)$

10) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 3$ $(x = 5, y = 1)$

11) $7(5x + 7y) = 13(3x + 11)$

$11(11x + 27) = 19(7x + 5y)$ $(x = 1, y = 3)$

12) $x + 3y = 1$

$x^2 - xy = 1$

$$\left(\begin{array}{l} x = 1, y = 0 \\ x = -\frac{3}{4}, y = \frac{4}{9} \end{array} \right)$$

13) $3x - y = 2$

$x^2 + y^2 = 4$

$$\left(\begin{array}{l} x = 0, y = -2 \\ x = \frac{6}{5}, y = \frac{8}{5} \end{array} \right)$$

14) $x + 2y = -3$

$y^2 = x + 2$ $(x = -1, y = -1)$

15) 2(x-2) – 3(y+1) = y – x + 3

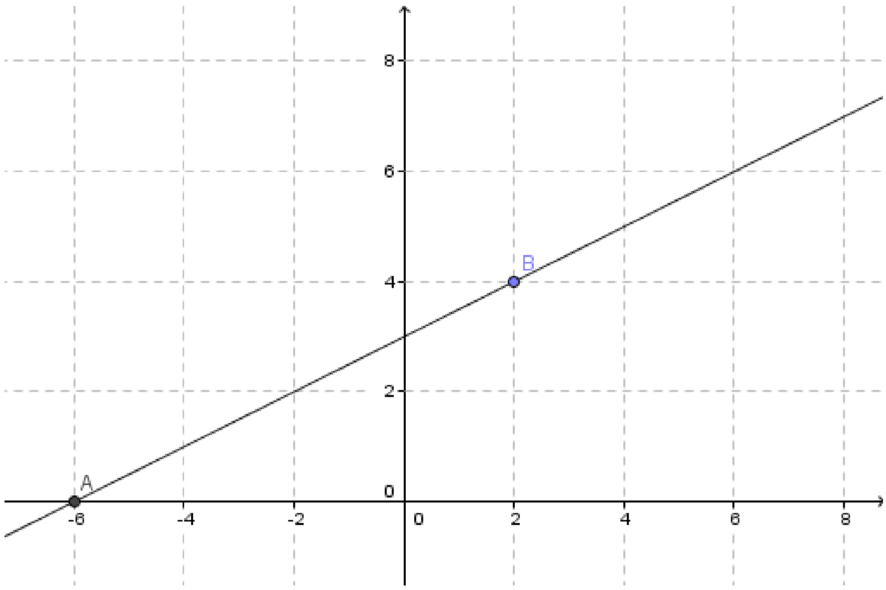
$$3(y^2 - \frac{4}{3}) + x = -\frac{2}{3}$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}, y = 0 \\ x = \ldots.., y = \ldots.. \end{array} \right)$$

<u>**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**</u> <u>(Β)</u>

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας **ΑΒ** και να τη φέρετε στη μορφή
α·x + β·y = γ

β) Να γράψετε μια εξίσωση ευθείας ώστε το σύστημα που θα προκύψει να έχει άπειρες λύσεις



1) α) $\begin{cases} 3(7x + 9y) - 162 = 6(4 - 2x) \\ 4(6x - 8y) + 29 = 7(x + 2y) \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$

δ) $\begin{array}{l} 0{,}1x = 0{,}2y + 0{,}6 \\ 6y = 3x - 6 \end{array}$

2) Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{4x-y}{6}=1-\frac{x}{4}$$

$$x+y=7$$

3) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+2y=2 \\ 4y-\dfrac{3}{2}(x+3)=-4 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+5y=23 \\ 5x+\dfrac{7y}{4}+6+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} (x+5)\cdot(y+7)=(x+1)\cdot(y-2)+112 \\ 2x+10=3y+1 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{cases} \dfrac{4x-y}{6}=1-\dfrac{x}{4} \\ x+y=7 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x+2y=2 \\ 4y-\dfrac{3}{2}(x+3)=-4 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 4|x|-2|y|=11 \\ 6-|x|-5|y|=15{,}5 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x^2+y^2=164 \\ x-y=2 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}$

ζ) $y = 6x^2 - \alpha x - \beta$ και $y = 2\alpha x + \beta$,αν τέμνονται στο (1,2) να βρείτε το άλλο κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4) Το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού είναι 14.Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων παίρνουμε αριθμό κατά 18 μικρότερο. Ποιος είναι ο αριθμός;

5) Ένα νοσοκομείο έχει συνολικά 250, δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια τα οποία έχουν συνολικά 650 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

6) Η περίμετρος ορθογωνίου είναι 40cm.Αν αυξήσουμε συγχρόνως την μια πλευρά κατά 5cm και την άλλη κατά 1cm τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά 65cm^2 .Ποιες είναι οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου;

7) Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας Τα μπορεί να βρεθεί από τον τύπο $R = \alpha \cdot T + \beta$.Αν στους $20^o C$ η αντίσταση ήταν 0,4Ω και στους $80^o C$ ήταν 0,5 Ω βρείτε τα α και β.

8) Αν ο μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το 1/8 του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν το1/2 του χρόνου της ζωής του. Να βρείτε πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασίλεψε ο μέγας Αλέξανδρος.

9) Σε έναν αγώνα ποδοσφαίρου διατέθηκαν εισιτήρια των 20 ευρώ και των 30 ευρώ. Κόπηκαν συνολικά 4300 εισιτήρια και εισπράχτηκαν 111.000 ευρώ. Να βρείτε πόσα εισιτήρια των 20 ευρώ και πόσα εισιτήρια των 30 ευρώ διατέθηκαν στον αγώνα.

10) Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων του Α και του Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α και 2 ψηφοδέλτια του Β τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια από τα ψηφοδέλτια του Β . Πόσα ψηφοδέλτια από κάθε φορέα υπάρχουν στην κάλπη

11) Σε έναν από τους πιο συναρπαστικούς αγώνες μπάσκετ στην ιστορία του Ελληνικού πρωταθλήματος στις 24/1/1981 ο Ιωνικός υποδέχτηκε στη Νίκαια τον Άρη. Σε αυτό το ματς ο Γιαννάκης (παίκτης του Ιωνικού Νίκαιας) και ο Γκάλης (παίκτης του Άρη) πέτυχαν και οι δύο μαζί, συνολικά 135 πόντους. Ο Άρης σημείωσε δώδεκα πόντους λιγότερους από τους διπλάσιους πόντους που σημείωσε ο Γκάλης. Ο Ιωνικός σημείωσε 41 πόντους περισσότερους από αυτούς που σημείωσε ο Γιαννάκης. Τελικά ο Άρης κέρδισε τον Ιωνικό με έναν πόντο διαφορά.

α) Να θεωρήσετε x τους πόντους που πέτυχε ο Γιαννάκης και y τους πόντους που πέτυχε ο Γκάλης και να κατασκευάσετε σύστημα γραμμικών εξισώσεων που να αποδίδει μαθηματικά τα παραπάνω. β) να βρείτε πόσους πόντους πέτυχε ο Γιαννάκης και πόσους ο Γκάλης και γ) να βρείτε το τελικό αποτέλεσμα