Κεφάλαιο 1: Φυσικοί αριθμοί - Διαιρετότητα

Ενότητα 1: Φυσικοί αριθμοί-Διάταξη φυσικών αριθμών-Αναπαραστάσεις φυσικών αριθμών.

Δραστηριότητα 1

Στην εικόνα 1 βλέπεις μία φωτογραφία οστών κυνοπίθηκου[1] που χρονολογούνται από την παλαιολιθική εποχή (27.000 π. Χ.). Τα οστά αυτά βρέθηκαν το 1960 στις όχθες της λίμνης Edwards στα σύνορα των Αφρικανικών χωρών Ζαΐρ και Ρουάντας.

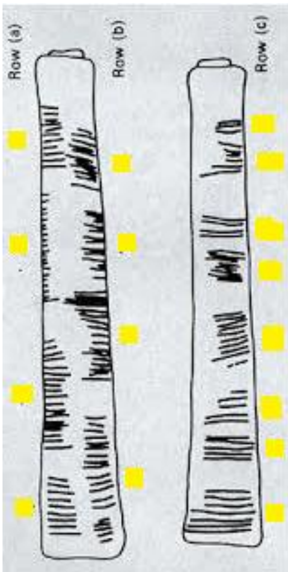
Να θυμάμαι ότι:

*Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., 1000, ..., 3001,... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**.*

Για να συμβολίσουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς χρησιμοποιούμε το γράμμα Ν.

*Πολλές φορές, όταν θέλουμε να συμβολίσουμε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό, χρησιμοποιούμε ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτου, συνήθως το **ν** ή το **n** (σε λατινικούς χαρακτήρες).*

Εικόνα 1: *Ishango Bones*



Εικόνα 2: *Σκίτσο των οστών Ishango*

Θεωρείται από τους ανθρωπολόγους ότι χρησίμευαν ως εργαλεία στους κατοίκους των παράκτιων παλαιολιθικών οικισμών της λίμνης, που ζούσαν από το ψάρεμα και από την καλλιέργεια της γης και ονομάστηκαν από τους αρχαιολόγους Ishango.

Η εικόνα 2 είναι σκίτσο της φωτογραφίας των οστών Ishango.
Να παρατηρήσεις με μεγάλη προσοχή τις δύο εικόνες και να προσπαθήσεις να απαντήσεις στα επόμενα ερωτήματα:

Ποια χρήση μπορεί να είχε το εργαλείο αυτό;
Τι μπορεί να παριστάνουν οι εγκοπές πάνω στα οστά[2];

Να προσέξω ότι:

*Κάθε φυσικός αριθμός **ν** έχει έναν **επόμενο**, τον **ν+1**. Για παράδειγμα, ο επόμενος του 10 είναι ο 11 (αφού 11=10+1).*

*Κάθε φυσικός αριθμός **ν**, εκτός από το 0, έχει έναν **προηγούμενο**, τον **ν-1**. Για παράδειγμα, ο προηγούμενος του 10 είναι ο 9 (αφού 9=10-1).*

Ο επόμενος του 0 είναι ο 1. Αλλά, ο 0 δεν έχει προηγούμενο.

---

[1] Η συλλογή των οστών βρίσκεται στο Royal Institute for Natural Sciences του Βελγίου στις Βρυξέλλες.
[2] Οι πληροφορίες αντλήθηκαν από το Mathematicians of the African Diaspora του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου **The State University of New York at Buffalo**,καθηγητής Scot Williams.

Να θυμάμαι ότι:

Τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να τους ***διατάξουμε*** *από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο δηλαδή σε αύξουσα σειρά μεγέθους, όπως 0<1<2<3<4<…<56< <57<… < 1005<…….*

Ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι το 0.

Δεν υπάρχει μεγαλύτερος φυσικός αριθμός, αφού για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό υπάρχει ο επόμενός του.

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους φυσικούς αριθμούς σε σημεία μίας ημιευθείας Οx την οποία ονομάζουμε αριθμογραμμή ή ημιάξονα των φυσικών αριθμών.

Ο φυσικός αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ονομάζεται ***τετμημένη*** *του σημείου. Για παράδειγμα, η τετμημένη του σημείου Β είναι 2.*

Όσο πιο δεξιά κινούμαστε πάνω στην αριθμογραμμή τόσο μεγαλώνουν οι τετμημένες των σημείων.

Το σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να συγκρίνουμε και να διατάξουμε τους φυσικούς αριθμούς είναι τα παρακάτω:

… < … : μικρότερος από…

… > … : μεγαλύτερος από…

… = … : ίσος με…

… ≤ … : μικρότερος ή ίσος από …

… ≥ … : μεγαλύτερος ή ίσος από ….

Δραστηριότητα 2

Α. Να τοποθετήσεις στην παρακάτω ημιευθεία Οx τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 15, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ. Κάθε σημείο που θα ορίζεις στην ημιευθεία Οx να το ονομάζεις με ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου.

Β. Στην παρακάτω ημιευθεία να τοποθετήσεις, με μονάδα που εσύ θα επιλέξεις, τους φυσικούς αριθμούς ως το 97.

Δραστηριότητα 3

Α. Να γράψεις και να παραστήσεις σε αριθμογραμμή που εσύ θα κατασκευάσεις όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι **μικρότεροι** από τον **7**. Να χρησιμοποιήσεις μαθηματικά σύμβολα για να περιγράψεις την προηγούμενη πρόταση.

Β. Να γράψεις και να παραστήσεις σε αριθμογραμμή τους **7 επόμενους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από 4**. Να χρησιμοποιήσεις μαθηματικό συμβολισμό για να περιγράψεις την προηγούμενη πρόταση.

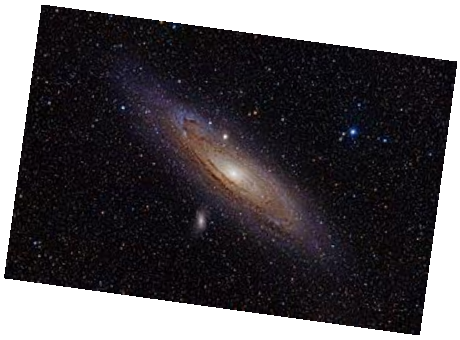
Γ. Να γράψεις και να παραστήσεις σε αριθμογραμμή όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι **μικρότεροι ή και ίσοι με το 9**. Χρησιμοποίησε μαθηματικά σύμβολα για να περιγράψεις την προηγούμενη πρόταση.

Δραστηριότητα 4

Η εικόνα που βλέπεις είναι φωτογραφία του έργου του *Vincent Willem van Gogh* «Έναστρη νύχτα», στο οποίο επιχειρεί να απεικονίσει με τον δικό του ιδιαίτερο τρόπο τον νυχτερινό ουρανό.

Ο van Gogh απεικονίζει στον νυκτερινό ουρανό κυρίως τη σελήνη και κάποιους μεγάλους φωτεινούς αστέρες. Αλλά στον νυκτερινό ουρανό υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος αστεριών πολλά από τα οποία είναι με δυσκολία ορατά. Οι περισσότεροι έχουμε την εντύπωση ότι τα αστέρια που είναι ορατά από τη Γη με γυμνό μάτι είναι τόσο πολλά που, πρακτικά, είναι περίπου αμέτρητα. Η εντύπωση αυτή, όμως, είναι εσφαλμένη. Στην πραγματικότητα «…*όλοι οι αστέρες που φαίνονται με γυμνό οφθαλμό είναι 7.107* ….»[3].

Αν θέλεις να μεταφέρεις αυτή την πληροφορία σε κάποιους φίλους και φίλες σου, αλλά δεν θυμάσαι τον ακριβή αριθμό, πόσα περίπου θα έλεγες ότι είναι τα αστέρια που μπορούμε να δούμε το βράδυ με γυμνό μάτι στον ουρανό;



Στη διπλανή εικόνα μπορείς να δεις τον γαλαξία της Ανδρομέδας που απέχει από τη Γη 2.537.000 έτη φωτός. Επειδή δεν είναι εύκολο να θυμόμαστε αυτόν τον αριθμό, μπορείς να τον στρογγυλέψεις σε κάποιον που θα είναι αρκετά κοντά του ώστε να δίνει μία σωστή αίσθηση της απόστασης, αλλά θα είναι πιο απλός;

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Να στρογγυλοποιήσεις τους φυσικούς αριθμούς

3655, 32187 και 73213 **:**

α. Σε δεκάδες,

β. Σε εκατοντάδες,

γ. Στην πλησιέστερη χιλιάδα.

Απάντηση:

α. Τάξη στρογγυλοποίησης: Δεκάδες.
Ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης: Ψηφίο μονάδων.
Για τον αριθμό 3655: Το ψηφίο μονάδων είναι 5. Άρα το ψηφίο μονάδων γίνεται 0 και το ψηφίο δεκάδων μεγαλώνει κατά μία μονάδα, δηλαδή από 5 γίνεται 6. Επομένως η στρογγυλοποίηση του αριθμού 3655 σε δεκάδες είναι ο αριθμός 3660.
Για τον 32187: Ψηφίο μονάδων 7. Άρα η στρογγυλοποίηση του 32187 σε δεκάδες είναι ο αριθμός 32190.
Για τον 73213: Ψηφίο μονάδων 3. Το ψηφίο δεκάδων μένει 1 και το ψηφίο μονάδων γίνεται 0.Άρα η στρογγυλοποίηση του 73213 σε δεκάδες είναι ο αριθμός73210.

Να προσέξω ότι:

Για να στρογγυλοποιήσω έναν φυσικό αριθμό:

- *Προσδιορίζω την τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.*
- *Εξετάζω το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.*
- *Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 (δηλαδή 0, 1, 2, 3 ή 4), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.*
- *Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (δηλαδή 5, 6, 7, 8 ή 9), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.*

[3] Τα στοιχεία αντλήθηκαν από την Wikipedia.

β. Τάξη στρογγυλοποίησης: Εκατοντάδες.
Ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης: Ψηφίο δεκάδων.
Για τον αριθμό 3655: Το ψηφίο δεκάδων είναι 5. Άρα το ψηφίο εκατοντάδων μεγαλώνει κατά 1 μονάδα, από 6 γίνεται 7, και τα ψηφία μονάδων και δεκάδων γίνονται 0. Επομένως η στρογγυλοποίηση του αριθμού 3655 σε εκατοντάδες είναι ο αριθμός 3700.
Για τον 32187: Ψηφίο δεκάδων το 8. Άρα η στρογγυλοποίηση του 32187 σε εκατοντάδες είναι ο αριθμός 32200.
Για τον 73213: Ψηφίο δεκάδων το 1. Άρα η στρογγυλοποίηση του 73213 σε εκατοντάδες είναι ο αριθμός 73200.

γ. Τάξη στρογγυλοποίησης: Χιλιάδες.
Ψηφίο αμέσως μικρότερη τάξης: Ψηφίο εκατοντάδων.
Για τον αριθμό 3655: Το ψηφίο εκατοντάδων είναι 6. Άρα το ψηφίο χιλιάδων μεγαλώνει κατά 1 μονάδα, από 3 γίνεται 4, και τα ψηφία μονάδων, δεκάδων και εκατοντάδων γίνονται 0. Επομένως η στρογγυλοποίηση του αριθμού 3655 σε χιλιάδες είναι ο αριθμός 4000.
Για τον 32187: Ψηφίο εκατοντάδων το 1. Άρα το ψηφίο των χιλιάδων παραμένει το ιδιο και τα ψηφία των μονάδων, δεκάδων και εκατοντάδων γίνονται 0. Ο αριθμός 32187 στρογγυλοποιείται σε χιλιάδες στον αριθμό 32000.
Για τον 73213: Ψηφίο εκατοντάδων το 1. Άρα ο αριθμός 73213 στρογγυλοποιείται σε χιλιάδες στον αριθμό 73000.

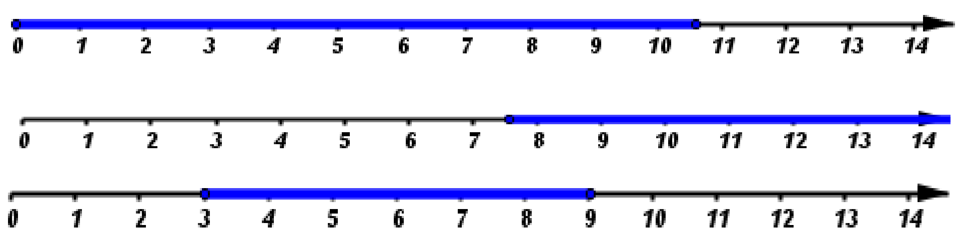
Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;

1. **α.** Να βρεις όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 6 και μεγαλύτεροι από το 5.

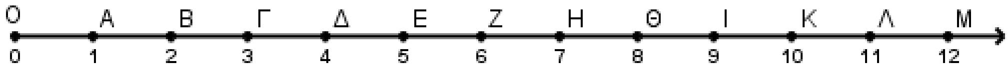
β. Να γράψεις και να παραστήσεις σε αριθμογραμμή όλους τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ισχύει $\nu \leq 7$.

γ. Να γράψεις και να παραστήσεις σε αριθμογραμμή όλους τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ισχύει $36 < \nu \leq 45$.

δ. Να χρησιμοποιήσεις τα σύμβολα $<$, $>$, $\leq$ και $\leq$ για να περιγράψεις τους φυσικούς αριθμούς που βρίσκονται στο έντονο μπλε τμήμα της αριθμογραμμής. Γράψε 2 τουλάχιστον διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.



2. Να παρατηρήσεις την παρακάτω αριθμογραμμή και να απαντήσεις στα εξής ερωτήματα:



α. Ποιο σημείο έχει τετμημένη το φυσικό αριθμό 5 ;

β. Ποιοι φυσικοί αριθμοί είναι τετμημένες σημείου με όνομα φωνήεν;

γ. Ποια σημεία έχουν τετμημένες φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι από 7;

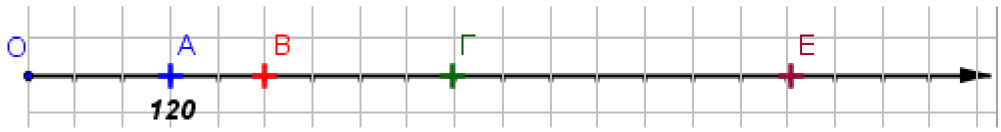
δ. Ποια λέξη σχηματίζουν τα σημεία με τετμημένες 4,9,1,11,5,9,12,12,1;

3. **α.** Να παραστήσεις σε μία αριθμογραμμή τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1000.

β. Να παραστήσεις σε μία αριθμογραμμή όλους τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000.000.

4. **α.** Να βρείτε την τετμημένη των σημείων Β , Γ και Δ.

β. Να τοποθετήσετε στην παρακάτω αριθμογραμμή του φυσικούς αριθμούς 43,322, 605, 720 **.**



5. Οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ και είναι διαδοχικοί, ο γ είναι ο μικρότερος και ο β είναι ο επόμενος του α. Να τους διατάξεις σε φθίνουσα σειρά.

6. Να βρεις 5 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς όταν ο ένας από αυτούς δεν έχει προηγούμενο.

7. Να βρεις τον επόμενο και τον προηγούμενο των φυσικών αριθμών 1, 10 , 100000 και 98782. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις να διατάξεις την τριάδα των αριθμών σε φθίνουσα σειρά χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα σύμβολα.

8. Να τοποθετήσεις το κατάλληλο σύμβολο <,=,> στα παρακάτω κενά:

123…..435, 235……129 , 0…..34, 348…….348, 213…..1.

9. Να στρογγυλοποιήσεις τους φυσικούς αριθμούς 5638657, 12987, 12345 στις δεκάδες , εκατοντάδες και δεκάδες χιλιάδες.

Και λίγα από την ιστορία των μαθηματικών

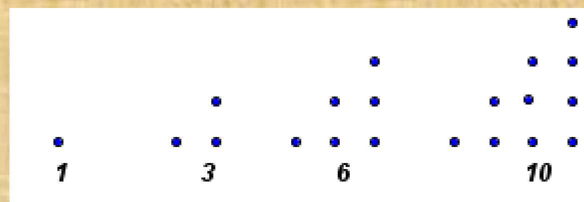
Οι πολύγωνοι αριθμοί

Ιστορικό Σημείωμα

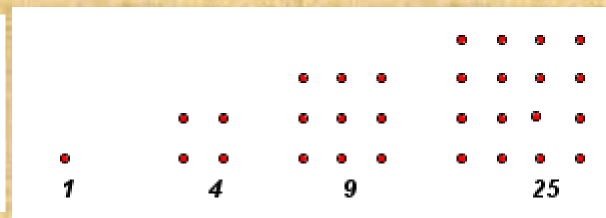
Ως **Πυθαγόρειοι** χαρακτηρίζονται οι μαθητές της φιλοσοφικό-θρησκευτικής σχολής που ίδρυσε ο Πυθαγόρας στον Κρότωνα της κάτω Ιταλίας στο τέλος του 6^{ου} και τις αρχές του 5^{ου} αιώνα π.Χ.

Βασική αρχή της σχολής ήταν ότι είναι δυνατόν να περιγραφούν όλες οι σχέσεις στο σύμπαν με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών. Για την αναπαράσταση των φυσικών αριθμών χρησιμοποιούσαν πετραδάκια (ψήφους). Τοποθετούσουν τα πετραδάκια με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργούνται συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα. Ανάλογα με το σχήμα χαρακτήριζαν και τον αριθμό που αντιστοιχούσε στο πλήθος από τα πετραδάκια. Μερικά από τα είδη πολύγωνων αριθμών μπορείς να δεις παρακάτω:

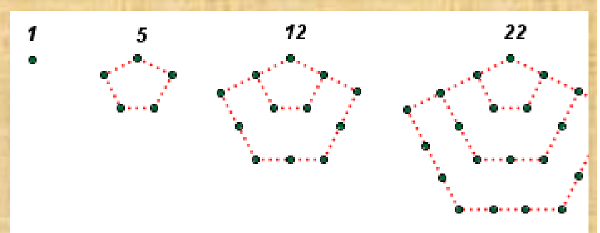
Τρίγωνοι Αριθμοί



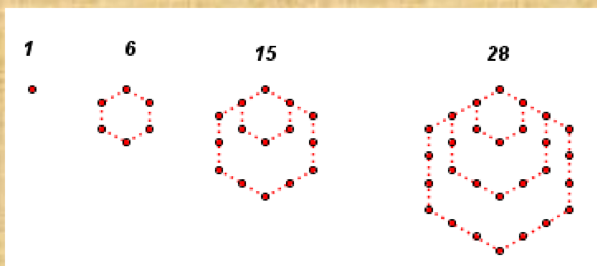
Τετράγωνοι αριθμοί



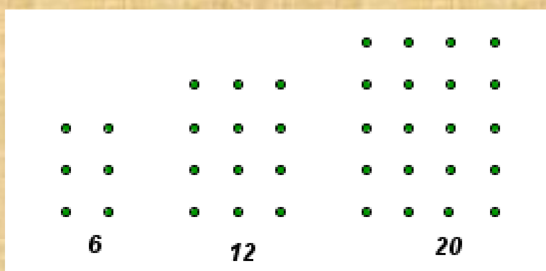
Πεντάγωνοι αριθμοί



Εξάγωνοι αριθμοί



Ετερομήκεις αριθμοί



10. Να βρεις τους επόμενους δύο τρίγωνους , τετράγωνους , πεντάγωνους , εξάγωνους και ετερομήκεις φυσικούς αριθμούς.