

## Ενότητα 6: Κριτήρια διαιρετότητας.

### Δραστηριότητα 1

**α.** Ποιοι από τους αριθμούς 20 , 12332 ,1500, 120 , 342, 23 , διαιρούνται με το 10; Διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 10.

**β.** Ο φυσικός αριθμός  $\alpha$  διαιρείται με το 10. Από ποιους άλλους φυσικούς αριθμούς θα διαιρείται οπωσδήποτε; Χρησιμοποίησε τις ιδιότητες που έμαθες στο προηγούμενο μάθημα.

**γ.** Στον παραπάνω φυσικό αριθμό  $\alpha$  προσθέτουμε το 1 , το 2 μέχρι το 9, οπότε προκύπτουν οι φυσικοί αριθμοί

$$\alpha+1, \alpha+2, \alpha+3, \alpha+4, \alpha+5, \alpha+6, \alpha+7, \alpha+8, \alpha+9.$$

1. Ποιοι από τους παραπάνω φυσικούς αριθμούς διαιρούνται με το 2;
2. Ποιοι από τους παραπάνω φυσικούς αριθμούς διαιρούνται με το 5;
3. Ποιο είναι το ψηφίο των μονάδων σε καθένα από τους παραπάνω φυσικούς αριθμούς;

**δ.** Διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 2.

**ε.** Διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 5.

### Δραστηριότητα 2

**α.** Να εξετάσεις ποιες από τις δυνάμεις με βάση το 10 διαιρούνται με το 4.

**β.** Στον παρακάτω πίνακα να χρωματίσεις όλα τα κελιά που περιέχουν αριθμούς που διαιρούνται με το 4.

300	301	302	303	304	305	306	307	308	309
310	311	312	313	314	315	316	317	318	319
320	321	322	323	324	325	326	327	328	329
330	331	332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347	348	349
350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
360	361	362	363	364	365	366	367	368	369
370	371	372	373	374	375	376	377	378	379
380	381	382	383	384	385	386	387	388	389
390	391	392	393	394	395	396	397	398	399

**γ.** Παρατήρησε τα ψηφία των αριθμών που χρωμάτισες και διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 4.



### Να θυμάμαι ότι:

**Κριτήρια Διαιρετότητας** με 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ή 25 λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.



### Να προσέξω ότι:

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:

**Με το 2** αν λήγει σε 0,2,4, 6 ή 8.

**Με το 5** αν λήγει σε 0 ή 5

**Με το 10** αν λήγει σε 0.

**Με το 4** αν ο αριθμός που αναπαρίσταται με τα 2 τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 4.

**Δραστηριότητα 3**

**α.** Να εξετάσεις ποιες από τις δυνάμεις με βάση το 10 διαιρούνται με το 8.

**β.** Στον παρακάτω πίνακα να χρωματίσεις όλα τα κελιά που περιέχουν αριθμούς που διαιρούνται με το 8.

1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209
1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219
1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229
1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239
1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249
1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259
1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269
1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279
1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289
1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299

**Να προσέξω ότι:**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:

**Με το 8** αν ο αριθμός που αναπαρίσταται με τα 3 τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 8.

**Με το 25** αν ο αριθμός που αναπαρίσταται με τα 2 τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 25.



**γ.** Παρατήρησε τα ψηφία των αριθμών που χρωμάτισες και διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 8.

**Δραστηριότητα 4**

**α.** Να εξετάσεις ποιες από τις δυνάμεις με βάση το 10 διαιρούνται με το 25.

**β.** Στον παρακάτω πίνακα να χρωματίσεις όλα τα κελιά που περιέχουν αριθμούς που διαιρούνται με το 25.

1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209
1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219
1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229
1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239
1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249
1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259
1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269
1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279
1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289
1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299

**γ.** Παρατήρησε τα ψηφία των αριθμών που χρωμάτισες και διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 25.

**Δραστηριότητα 5**

Στον παρακάτω πίνακα σε κίτρινο πλαίσιο είναι όσοι από τους φυσικούς αριθμούς που περιέχει διαιρούνται με το 4.

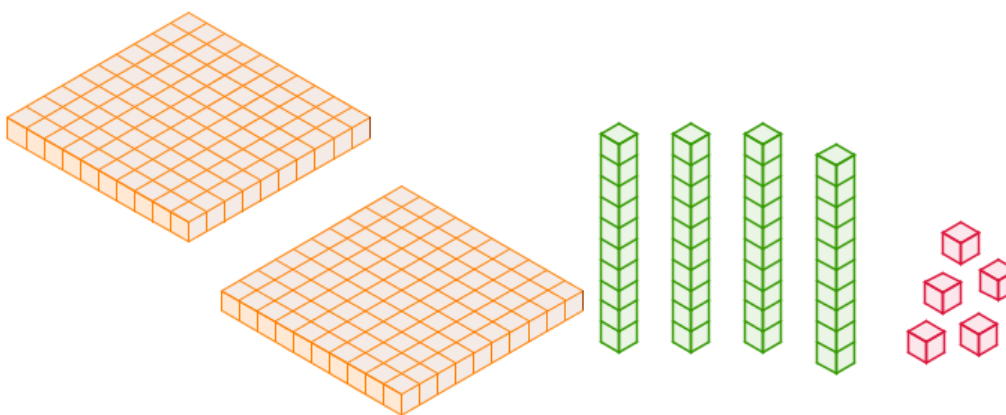
- α.** Να κυκλώσετε όλους τους φυσικούς που διαιρούνται με το 25.
- β.** Ποιοι διαιρούνται ταυτόχρονα με το 4 και το 25;
- γ.** Διατύπωσε ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 4 και το 25;



**Να προσέξω ότι:**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται **με το 4 και το 25** **συγχρόνως** αν τα δύο τελευταία του ψηφία είναι μηδέν.

300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319
320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359
360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379
380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399
400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419
420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439
440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459
460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479
480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499
500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519



**Δραστηριότητα 6**

- α.** Να βρεις το υπόλοιπο της διαίρεσης του 10 , 100 , 1000 με το 3; Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης κάθε δύναμης με βάση το 10 με το 3;
- β.** Ποιο είναι το πλήθος των πλακιδίων με σχήμα κύβου με ακμή 1 της παρακάτω εικόνας;
- γ.** Οι 2 τετράγωνες πλάκες και οι 4 ράβδοι συναρμολογήθηκαν με ράβδους των 3 πλακιδίων και, όπου χρειάστηκε, χρησιμοποιήθηκαν μονά πλακίδια. Ποιος μπορεί να είναι ο μικρότερος αριθμός μονών πλακιδίων που υπάρχουν στην παρακάτω εικόνα;

**Να προσέξω ότι:**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:



**Με το 3** αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

**Με το 9** αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 0.9

**Με το 6** αν διαιρείται συγχρόνως με το 2 και το 3.

**δ.** Μπορείς με τα μονά πλακίδια να συναρμολογήσεις ράβδους των τριών πλακιδίων με τέτοιο τρόπο ώστε να μην περισσέψει κανένα μονό πλακίδιο; Αν όχι, τι επιπλέον θα χρειαζόσουν για να το καταφέρεις;

**ε.** Μπορείς να διατυπώσεις ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 3.

**Δραστηριότητα 7**

Να επαναλάβεις την δραστηριότητα 6 αντικαθιστώντας τον αριθμό 3, που τον συναντάς, με τον αριθμό 9.

**Δραστηριότητα 8**

**α.** Στον παρακάτω πίνακα να κυκλώσεις με μπλε χρώμα όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το 2 και με κόκκινο χρώμα τους αριθμούς που διαιρούνται με το 3.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

**β.** Να χρωματίσεις με κίτρινο χρώμα τα κελιά που περιέχουν αριθμούς που διαιρούνται με το 6. Τι παρατηρείς;

**γ.** Προσπάθησε να διατυπώσεις ένα κριτήριο που να δείχνει πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 6.

**Παραδείγματα - Εφαρμογές**

**1.** Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 23742... (αυτό του οποίου η θέση σημειώνεται με τις τελείες) έχει σβηστεί. Ποιο μπορεί να είναι το ψηφίο που λείπει αν ο αριθμός διαιρείται από το 3; Να καταγράψεις τους εξαψήφιους αριθμούς που προκύπτουν. Μπορεί κάποιος από τους αριθμούς αυτούς να διαιρείται από το 5;

**Απάντηση:**

Ο εξαψήφιος αριθμός διαιρείται από το 3. Άρα το άθροισμα των ψηφίων του θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3. Τα ψηφία του που φαίνονται έχουν άθροισμα 18. Το μικρότερο ψηφίο είναι το 0 και το μεγαλύτερο είναι το 9. Επομένως το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού θα είναι ένα πολλαπλάσιο του 3 από το 18 μέχρι και το 27. Δηλαδή θα είναι 18 ή 21 ή 24 ή 27.

Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι 18, τότε το ψηφίο που λείπει είναι το 0 και αριθμός είναι ο 237420.

Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι 21, τότε το ψηφίο που λείπει είναι το 3 και αριθμός είναι ο 237423.

Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι 24, τότε το ψηφίο που λείπει είναι το 6 και αριθμός είναι ο 237426.

Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι 27, τότε το ψηφίο που λείπει είναι το 9 και αριθμός είναι ο 237429.

Από τους παραπάνω εξαψήφιους αριθμούς μόνο ο 237420 διαιρείται με το 5 γιατί είναι ο μόνος που τελειώνει σε 5 ή 0.

2. Αν ο  $n$  είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, να εξηγήσεις γιατί ο αριθμός  $12n + 30$  διαιρείται από το 2.

**Απάντηση:**

Ο αριθμός 12 είναι άρτιος. Επομένως και ο αριθμός  $12n$  είναι άρτιος όποιος και αν είναι ο  $n$ . Δηλαδή ο αριθμός  $12n$  τελειώνει σε 0 ή σε 2 ή σε 4 ή σε 6 ή σε 8. Τότε όμως και το άθροισμα του  $12n$  με τον 30 θα τελειώνει σε 0 ή σε 2 ή σε 4 ή σε 6 ή σε 8, αφού ο αριθμός 30 τελειώνει σε 0. Επομένως ο αριθμός  $12n + 30$  διαιρείται από το 2 (αφού τελειώνει σε 0 ή σε 2 ή σε 4 ή σε 6 ή σε 8).

**Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;**

1. Δίνονται οι αριθμοί 325, 2310, 6302 και 1548. Να βρεις ποιοι από τους αριθμούς αυτούς διαιρούνται με:
  - α. το 5
  - β. το 3
  - γ. το 25
  - δ. το 2 και το 9
2. Να συμπληρώσεις τα τετραγωνάκια στον αριθμό που ακολουθεί  $\square 75\square$ , ώστε να προκύψει τετραψήφιος αριθμός που να διαιρείται με το 9 και το 4.
3. Να εξετάσεις αν αριθμός  $\alpha\beta\gamma\delta$ , όπου  $\alpha+\beta+\gamma+\delta=15$ , διαιρείται με το 3, 9 ή το 5.
4. Δίνονται οι αριθμοί 765, 1520, 4404 και 3850. Να βρεις ποιοι από αυτούς διαιρούνται με:
  - α. το 2
  - β. το 3
  - γ. το 4
  - δ. το 5
  - ε. το 25
  - στ. το 9.
5. Να συμπληρώσεις τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:
  - α.  $43\square$  να διαιρείται με το 2
  - β.  $93\square$  να διαιρείται με το 4
  - γ.  $83\square$  να διαιρείται με το 3.
6. Να συμπληρώσεις τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:
  - α.  $43\square$  να μην διαιρείται με το 5
  - β.  $83\square$  να μην διαιρείται με το 3
  - γ.  $9\square 3$  να μην διαιρείται με το 9
7. Ποιο ψηφίο μπορεί να τοποθετηθεί στη θέση του  $\kappa$ , ώστε ο αριθμός  $1\kappa 2\kappa 3$  που θα προκύψει να διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9;
8. Να βρεις πόσοι διψήφιοι αριθμοί διαιρούνται ταυτόχρονα με τους αριθμούς 2, 3, 5 και 9. Εξήγησε πώς σκέφτηκες.

9. Ο τριψήφιος αριθμός  $2αβ$  διαιρείται με το 3, 4 και 5. Ποιος είναι ο αριθμός;
10. α. Να βρεις έναν τριψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 5 και το 9.  
 β. Ποιος είναι ο μικρότερος τριψήφιος αριθμός που διαιρείται ταυτόχρονα με το 5 και το 9.  
 γ. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος τριψήφιος αριθμός που διαιρείται ταυτόχρονα με το 5 και το 9.
11. Να συμπληρώσεις τα κενά ώστε οι παρακάτω αριθμοί να διαιρούνται με 9 και το 2.  
 α. 15\_ \_      β. 3\_5\_
12. Να συμπληρώσεις τα κενά ώστε οι παρακάτω αριθμοί να διαιρούνται με 4 και το 3.  
 α. 3\_2\_      β. 2\_1\_
13. Χρησιμοποίησε τα κριτήρια διαιρετότητας και τον τρόπο που δούλεψες στην άσκηση 15 της προηγούμενης παραγράφου για να βρεις τους παράγοντες του 120.
14. α. Χρησιμοποίησε τα κριτήρια διαιρετότητας και τον τρόπο που δούλεψες στην προηγούμενη άσκηση για να βρεις τους παράγοντες του 60 και του 100.  
 β. Βασιζόμενος στην απάντηση που έδωσες στο ερώτημα α, θα μπορούσες να βρεις έναν λόγο που η ώρα χωρίζεται σε 60 και όχι σε 100 λεπτά;  
 γ. Θα μπορούσες να προτείνεις μία άλλη καλύτερη υποδιαίρεση της ώρας;
15. Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα

Φυσικός Αριθμός	Παράγοντες	Πλήθος Παραγόντων
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		

Φυσικός Αριθμός	Παράγοντες	Πλήθος Παραγόντων
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		
50		

α. Τι παρατηρήσεις μπορείς να κάνεις για τους φυσικούς αριθμούς που έχουν ακριβώς 3 παράγοντες;

- β. Οι φυσικοί αριθμοί που έχουν 3 παράγοντες ανήκουν σε κάποια κατηγορία πολύγωνων αριθμών;
- γ. Να βρεις τον αμέσως επόμενο φυσικό αριθμό μετά το 50 που έχει ακριβώς 3 παράγοντες.
- δ. Τι παρατηρήσεις μπορείς να κάνεις για τους αριθμούς που έχουν ακριβώς 5 παράγοντες;
- ε. Να βρεις τον αμέσως επόμενο φυσικό αριθμό που θα έχει ακριβώς 5 παράγοντες.
- στ. Τι παρατηρείς για το πλήθος των παραγόντων των ετερομήκων αριθμών;

### Και λίγα από την ιστορία των μαθηματικών



#### Ιστορικό Σημείωμα

Από την αρχαιότητα ακόμα οι μαθηματικοί επέδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για την μελέτη των αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι για παράδειγμα πίστευαν ότι τα πάντα στη φύση μπορούν να περιγραφούν με σχέσεις φυσικών αριθμών.

Από τα 13 βιβλία των «Στοιχείων» του Ευκλείδη τα 3 (το 7<sup>ο</sup>, το 8<sup>ο</sup> και το 9<sup>ο</sup>) είναι αφιερωμένα στη θεωρία των αριθμών. Στην τελευταία πρόταση του 9<sup>ου</sup> βιβλίου, την πρόταση 36, ο Ευκλείδης ασχολείται με μία κλάση αριθμών τους οποίους ονομάζουμε **τέλειους αριθμούς**. Τέλειοι είναι οι αριθμοί που είναι ίσοι με το άθροισμα όλων των γνήσιων διαιρετών τους, δηλαδή των διαιρετών τους που είναι μικρότεροι από αυτούς (θυμήσου ότι κάθε αριθμός είναι διαιρέτης του εαυτού του). Ένα παράδειγμα τέλειου αριθμού είναι ο αριθμός 6. Παρατήρησε ότι οι διαιρέτες του 6 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3 και 6. Οι γνήσιοι διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2 και 3. Το άθροισμα 1+2+3 είναι ίσο με 6. Άρα, πραγματικά, ο αριθμός 6 είναι τέλειος.

Μια άλλη κατηγορία αριθμών που απασχόλησαν πολύ τους μαθηματικούς είναι οι φίλοι (ή φίλιοι) αριθμοί. **Φίλοι αριθμοί** είναι ένα ζευγάρι αριθμών που ο καθένας τους είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν κατορθώσει να ανακαλύψουν ένα μόνο ζευγάρι φίλων αριθμών, τους αριθμούς 220 και 284. Το θέμα των φίλων αριθμών απασχόλησε, μεταξύ άλλων, και τους Άραβες και τους Πέρσες μαθηματικούς που διαδέχτηκαν τους Έλληνες στη μελέτη των μαθηματικών και της αστρονομίας. Χαρακτηριστικά, ανάμεσα σε αυτούς που ασχολήθηκαν με τους φίλους αριθμούς, μπορούμε να αναφέρουμε τις περιπτώσεις του Thabit ibn Qurra (έζησε στη Βαγδάτη γύρω στο 900 μ. Χ.) και του Kamal al-Din al-Farisi (έζησε στην Περσία γύρω στο 1300 μ. Χ.) που ανακάλυψε το δεύτερο ζεύγος φίλων αριθμών, τους αριθμούς 17296 και 18416.

- 16. α. Να βρεις όλους του διαιρέτες του 220 και του 284.
  - β. Να προσθέσεις όλους του γνήσιους διαιρέτες του 220. Τι παρατηρείς;
  - γ. Να προσθέσεις όλους του γνήσιους διαιρέτες του 284. Τι παρατηρείς; Είναι οι αριθμοί 220 και 284 φίλιοι αριθμοί;
- 17. Να εξετάσεις αν ο αριθμός 28 είναι τέλειος αριθμός.