Ενότητα 9: Συστήματα αρίθμησης.

Δραστηριότητα 1

Ένας ιδιοκτήτης αλευρόμυλου (μυλωνάς) του 19ου αιώνα είχε στη διάθεση του ζύγια του 1, των 2, των 4, των 8 και των 16 κιλών. Υποστήριζε ότι με αυτά μπορεί να ζυγίσει οποιοδήποτε τσουβάλι με αλεύρι είχε βάρος φυσικό αριθμό μέχρι 31 κιλά. Για παράδειγμα όταν ήθελε να πουλήσει 11 κιλά αλεύρι έβαζε στη μία πλευρά της ζυγαριάς τα ζύγια του 1, των 2 και των 8 κιλών και στην άλλη ένα άδειο τσουβάλι που γέμιζε με αλεύρι μέχρι να ισορροπήσει η ζυγαριά.

α. Μπορούσε να ζυγίσει ένα τσουβάλι αλεύρι 18 κιλών; Ποια ζύγια θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει;

β. Για να μην χρειάζεται κάθε φορά που έπρεπε να ζυγίσει ένα τσουβάλι να ψάχνει ποια ζύγια πρέπει να χρησιμοποιήσει, έφτιαξε έναν πίνακα που αντιστοιχούσε τα κιλά με τα ζύγια που έπρεπε να χρησιμοποιήσει. Όταν χρειαζόταν ένα ζύγι σημείωνε μία μονάδα ενώ όταν δεν το χρειαζόταν σημείωνε ένα μηδέν. Ένα μέρος του πίνακα είναι το παρακάτω. Μπορείς να τον συμπληρώσεις;

Κιλά που θέλω να ζυγίσω	***Ζύγια που πρέπει να χρησιμοποιήσω***					
		16 κιλών	***8 κιλών***	***4 κιλών***	***2 κιλών***	***1 κιλό***
1		0	0	0	0	1
2		0	0	0	1	0
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

Να θυμάμαι ότι:

*Ένα σύστημα αρίθμησης ονομάζεται **θεσιακό** όταν η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται από τη θέση του στην αναπαράσταση του αριθμού*

*Το **δυαδικό σύστημα** αρίθμησης λέμε ότι έχει **βάση το 2**, γιατί στην αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιεί μόνο **δύο ψηφία**, **το 0 και το** 1. Η αξία κάθε ψηφίου, ανάλογα με τη θέση του μέσα στον αριθμό, είναι κάποια **δύναμη του 2**.*

Κιλά που θέλω να ζυγίσω	Ζύγια που πρέπει να χρησιμοποιήσω					
		16 κιλών	8 κιλών	4 κιλών	2 κιλών	1 κιλό
26						
27						
28						
29						
30						
31						

Δραστηριότητα 2

Ένας πελάτης ζήτησε να αγοράσει δύο τσουβάλια αλεύρι από αυτά που είχε ήδη ζυγίσει ο μυλωνάς. Στο ένα ήταν γραμμένος ο αριθμός 1101 και στο άλλο ο 1011. Για να επιβεβαιώσει το βάρος του περιεχόμενου των δύο τσουβαλιών ο μυλωνάς τα έβαλε και τα δύο πάνω στη ζυγαριά. Ποια ζύγια έπρεπε να χρησιμοποιήσει;

Βάρος που θέλω να ζυγίσω σε γρ.	Ζύγια που πρέπει να χρησιμοποιήσω					
	243 γρ.	81 γρ.	27 γρ.	9 γρ.	3 γρ.	1γρ.
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5						
6						
7						

Να θυμάμαι ότι:

*Το **τριαδικό σύστημα** αρίθμησης λέμε ότι έχει **βάση το 3**, γιατί για την αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιεί μόνο **τρία ψηφία**, **το 0, το 1 και το 2**. Η αξία κάθε ψηφίου, ανάλογα με τη θέση του μέσα στον αριθμό, είναι κάποια **δύναμη του 3**.*

Δραστηριότητα 3

Ο μυλωνάς είχε ένα φίλο έμπορο μπαχαρικών, τον Ιακώβ. Αυτός, για να ζυγίζει τα μπαχαρικά του, χρησιμοποιούσε ελαφρύτερα ζύγια. Είχε στη διάθεσή του και χρησιμοποιούσε 2 ζύγια του ενός γραμμαρίου, 2 ζύγια των 3 γραμμαρίων , 2 ζύγια των 9 γραμμαρίων , 2 ζύγια των 27 γραμμαρίων , 2 ζύγια των 81 γραμμαρίων και 2 ζύγια των 243 γραμμαρίων. Έλεγε ότι μπορούσε να ζυγίσει οποιοδήποτε βάρος μέχρι τα 728 γραμμάρια.

α. Να ελέγξεις αν μπορούσε να ζυγίσει μπαχαρικά 35 και 475 γραμμαρίων.

β. Όπως ο μυλωνάς, έτσι και ο Ιακώβ, είχε φτιάξει ένα πίνακα με τα ζύγια που έπρεπε να χρησιμοποιήσει για κάθε βάρος από το 1 έως το 728. Ένα μέρος του πίνακα είναι παρακάτω. Μπορείς να τον συμπληρώσεις;

Βάρος που θέλω να ζυγίσω σε γρ.	Ζύγια που πρέπει να χρησιμοποιήσω					
	243 γρ.	81 γρ.	27 γρ.	9 γρ.	3 γρ.	1 γρ.
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
17						
18						
19						
20						
27						
28						
80						
81						
100						
243						
244						
245						
475						
500						
600						

γ. Σε κάποιες συσκευασίες μπαχαρικών ο Ιακώβ είχε αναγράψει τους αριθμούς 21012, 20020, 22220. Μπορείς να βρεις τα βάρη των συγκεκριμένων συσκευασιών;

Δραστηριότητα 4

Το καραβάνι που έφερνε στον Ιακώβ τα μπαχαρικά από την ανατολή προμήθευε και τον Επαμεινώνδα με χρώματα σε σκόνη τα οποία πουλούσε στις νοικοκυρές και στις βιοτεχνίες ρούχων για να βάφουν τα υφάσματα που έφτιαχναν . Αυτός για να ζυγίζει τα χρώματα σε σκόνη χρησιμοποιούσε 4 ζύγια του ενός γραμμαρίου, 4 ζύγια των 5 γραμμαρίων , 4 ζύγια των 25 γραμμαρίων , 4 ζύγια των 125 γραμμαρίων και 4 ζύγια των 625 γραμμαρίων. Ισχυριζόταν ότι με αυτά μπορούσε να ζυγίσει οποιοδήποτε βάρος μέχρι τα 3124 γραμμάρια.

α. Να ελέγξεις αν μπορούσε να ζυγίζει χρώμα σε σκόνη που να ζυγίζου 234 και 1275 γραμμάρια.

Να θυμάμαι ότι:

*Το **πενταδικό σύστημα** αρίθμησης λέμε ότι έχει **βάση το 5**, γιατί για την αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιεί **πέντε ψηφία, το 0, το 1, το2, το 3 και το 4.** Η αξία κάθε ψηφίου, ανάλογα με τη θέση του μέσα στον αριθμό, είναι κάποια **δύναμη του 5**.*

β. Και ο Επαμεινώνδας είχε φτιάξει ένα πίνακα με τα ζύγια που έπρεπε να χρησιμοποιήσει για κάθε βάρος από το 1 έως το 3125. Ένα μέρος του πίνακα είναι παρακάτω. Μπορείς να τον συμπληρώσεις;

	Ζύγια που πρέπει να χρησιμοποιήσω				
Βάρος που θέλω να ζυγίσω σε γρ.	***625 γρ.***	***125 γρ.***	***25γρ.***	***5 γρ.***	***1γρ.***
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	4
5	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	1
7					
8					
9					
10					
11					
12					
16					
17					
18					
19					
20					
25					
28					
80					
90					
100					
200					
250					
500					
1000					
2000					
3124					

γ. Σε κάποιες συσκευασίες μπαχαρικών ο Επαμεινώνδας είχε γράψει πάνω τους αριθμούς 3421, 3020, 4012. Μπορείς να βρεις τα βάρη των συγκεκριμένων συσκευασιών;

Να προσέξω ότι:

Στον αριθμό $1101101_{(2)}$ ο δείκτης 2 δηλώνει ότι είναι αριθμός του δυαδικού συστήματος.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης αντιστοιχεί ο αριθμός $1101101_{(2)}$;

Απάντηση:

Στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης η αξία κάθε ψηφίου του αριθμού, ανάλογα με τη θέση μέσα στον αριθμό εκφράζεται από μία δύναμη του 2. Έτσι, έχουμε ψηφίο μονάδων, ψηφίο δυάδων, ψηφίο τετράδων, ψηφίο οκτάδων, ψηφίο δεκαεξάδων κ.ο.κ.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αξία κάθε ψηφίου για έναν εξαφήφιο αριθμό.

Τριανταδυάδα	Δεκαεξάδα	Οκτάδα	Τετράδα	Δυάδα	Μονάδα
32	16	8	4	2	1
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Ο αριθμός $1101101_{(2)}$ αποτελείται από 1 μονάδα, 0 δυάδες, 1 τετράδα, 1 οκτάδα, 0 δεκαεξάδες, 1 τριανταδυάδα και 1 εξηντατετράδα. Η αξία κάθε ψηφίου του είναι:

1	1	0	1	1	0	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$1\cdot2^6$	$1\cdot2^5$	$0\cdot2^4$	$1\cdot2^3$	$1\cdot2^2$	$0\cdot2^1$	$1\cdot2^0$
64	32	0	8	4	0	1

Δηλαδή ο αριθμός $1101101_{(2)}$ αντιστοιχεί στον αριθμό

$$1\cdot64+1\cdot32+0\cdot16+1\cdot8+1\cdot4+0\cdot2+1\cdot1=111$$

του δεκαδικού συστήματος (δηλαδή στον $111_{(10)}$).

2. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο αριθμός $210211_{(3)}$;

Απάντηση:

Σε έναν αριθμό του τριαδικού συστήματος έχουμε ψηφίο μονάδων, ψηφίο τριάδων, ψηφίο εννιάδων, ψηφίο εικοσιεπτάδων κ.ο.κ. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αξία κάθε ψηφίου σε έναν εξαψήφιο αριθμό του τριαδικού συστήματος:

Να προσέξω ότι:

Στον αριθμό $210211_{(3)}$ ο δείκτης 3 δηλώνει ότι είναι αριθμός του τριαδικού συστήματος.

243-δες	81-δες	27-δες	9-δες	Τριάδες	Μονάδες
243	81	27	9	3	1
3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

Έτσι ο αριθμός $210211_{(3)}$ αποτελείται από 1 μονάδα, 1τριάδα, 2 εννιάδες, 0 εικοσιεπτάδες, 1 ογδονταενάδα και 2 διακοσιοσαραντατριάδες. Η αξία κάθε ψηφίου του είναι:

2	1	0	2	1	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓
$1\cdot3^5$	$2\cdot3^4$	$0\cdot3^3$	$2\cdot3^2$	$1\cdot3^1$	$1\cdot3^0$
243	162	0	18	3	1

Δηλαδή ο αριθμός $210211_{(3)}$ αντιστοιχεί στον αριθμό

$$1\cdot243+2\cdot81+0\cdot27+2\cdot9+1\cdot3+1\cdot1=427$$

του δεκαδικού συστήματος (δηλαδή στον $427_{(10)}$).

3. Σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο αριθμός $32104_{(5)}$;

Να προσέξω ότι:

Στον αριθμό $32104_{(5)}$ ο δείκτης 5 δηλώνει ότι είναι αριθμός του πενταδικού συστήματος.

Απάντηση:

Τα πέντε ψηφία του πενταδικού συστήματος είναι τα 0, 1, 2, 3και 4. Σε κάθε αριθμό του πενταδικού συστήματος έχουμε ψηφίο μονάδων, ψηφίο πεντάδων, ψηφίο εικοσιπεντάδων, ψηφίο εκατονεικοσιπεντάδων κ.ο.κ. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αξία κάθε ψηφίου ενός πενταψήφιου αριθμού:

625-δες	*125-δες*	*25-δες*	*Πεντάδες*	*Μονάδες*
625	*125*	*25*	*5*	*1*
5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

Ο αριθμός $32104_{(5)}$ αποτελείται από 4 μονάδες, 0 πεντάδες, 1 εικοσιπεντάδα, 2 εκατονεικοσιπεντάδες και 3 εξακοσιο-εικοσιπεντάδες. Η αξία κάθε ψηφίου του είναι:

3	**2**	**1**	**0**	**4**
↓	↓	↓	↓	↓
$3\cdot5^4$	$2\cdot5^3$	$1\cdot5^2$	$0\cdot5^1$	$4\cdot5^0$
1875	**250**	**25**	**0**	**4**

Δηλαδή ο αριθμός $32104_{(5)}$ αντιστοιχεί στον αριθμό

$$3\cdot625+2\cdot125+1\cdot25+0\cdot5+4\cdot1=1875+250+25+0+4=2154$$

του δεκαδικού συστήματος (δηλαδή στον $2154_{(10)}$).

4. Να μετατρέψεις τον αριθμό $26_{(10)}$ σε αριθμό του δυαδικού συστήματος

Απάντηση:

Η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που δεν υπερβαίνει το 26 είναι το 16. Επομένως ο αριθμός26 περιέχει μία δεκαεξάδα και περισ-σεύουν 10 μονάδες. Στις 10 μονάδες περιέχεται μία οκτάδα και περισσεύουν 2μονάδες.Στιςδύο μονάδες περιέχεται μία δυάδα και περισσεύουν 0 μονάδες. Άρα $26_{(10)}=1110_{(2)}$.

5. Να κάνεις την πρόσθεση $122_{(3)}+210_{(3)}$

Απάντηση:

$$\begin{array}{r} 122 \\ +\;210 \\ \hline 1102 \end{array}$$

Προσθέτουμε πρώτα τις μονάδες:2+0=2 μονάδες.
Μετά προσθέτουμε τις τριάδες: 2+1=3 τριάδες. Αλλά 3 τριάδες μας κάνουν μία εννιάδα. Άρα έχουμε 0 τριάδες και 1 εννιάδα που προστίθεται στις **υ**πόλοιπες (κρατούμενο).
Τέλος, προσθέτουμε τις εννιάδες: 1+2+1=4. Αλλά τρεις εννιάδες μας δίνουν μία εικοσιεπτάδα.

Δηλαδή έχουμε μία εικοσιεπτάδα και μία εννιάδα που περίσσεψε. Άρα

$$122_{(3)}+210_{(3)}=1102_{(3)}$$

Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;

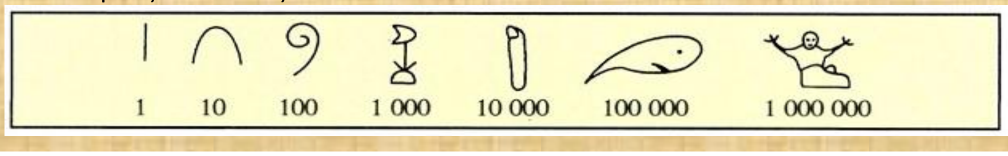
1. Να γράψεις τους δέκα πρώτους αριθμούς του δυαδικού συστήματος.
2. Να μετατρέψεις τους πιο κάτω αριθμούς του δυαδικού συστήματος σε αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης:
   (α) $101_{(2)}$ (β) $1101_{(2)}$ (γ) $10111_{(2)}$ (δ) $110000_{(2)}$
3. Να κάνεις την παρακάτω πρόσθεση και αφαίρεση στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.
   $$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{+101} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ \underline{-\ 101} \end{array}$$
4. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:
   α. 5 **β.** 8 **γ.** 13 **δ.** 47 **ε.** 125 **στ.** 243
5. Να βρείτε τον επόμενο και τον προηγούμενο αριθμό των πιο κάτω αριθμών του δυαδικού συστήματος:
   (α) 101 (β) 1110
6. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ο ποιος ο μικρότερος αριθμός τριψήφιος του δυαδικού. Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.
7. Ένας αριθμός του δεκαδικού συστήματος μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα και δίνει έναν τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αριθμός αυτός του δεκαδικού συστήματος;
8. Να μετατρέψεις από το τριαδικό στο δεκαδικό σύστημα τους παρακάτω αριθμούς
   (α) $2210_{(3)}$ (β) $1110_{(3)}$
9. Να μετατρέψεις από το πενταδικό στο δεκαδικό σύστημα τους παρακάτω αριθμούς
   (α) $4310_{(3)}$ (β) $1110_{(3)}$

Και λίγα από την ιστορία των μαθηματικών

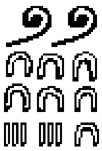
Ιστορικό Σημείωμα

Οι περισσότεροι αρχαίοι πολιτισμοί δεν χρησιμοποίησαν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, που είναι το βασικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα.
Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν με μεγάλη επιτυχία ένα εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης. Ενδιαφέρον έχει ότι τα 59 ψηφία του συστήματος (δεν υπάρχει το μηδέν) είναι χτισμένα στο δεκαδικό σύστημα. Αλλά υπήρξαν και λαοί που δεν χρησιμοποίησαν θεσιακά συστήματα. Για παράδειγμα, το σύστημα των Αιγυπτίων δεν ήταν θεσιακό. Αυτό σημαίνει ότι η αξία κάθε συμβόλου εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύμβολο και όχι από τη θέση του μέσα στον αριθμό.

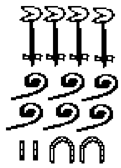
Στον πίνακα που ακολουθεί μπορείς να δεις τα βασικά αριθμητικά σύμβολα του συστήματος των Αιγυπτίων και την αξία καθενός από αυτά:



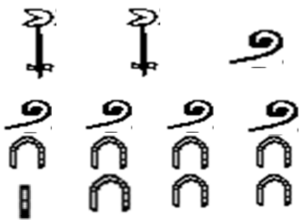
10. Να προσπαθήσεις με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα να διαβάσεις τους αριθμούς του Αιγυπτιακού Ιερογλυφικού συστήματος που ακολουθούν:



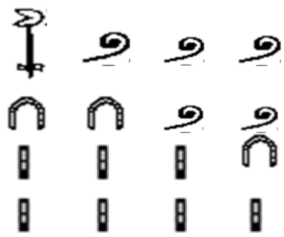
και



11. Να επιχειρήσεις να κάνεις την πρόσθεση:



+



Και λίγα ακόμα από την ιστορία των μαθηματικών

Ιστορικό Σημείωμα

Σήμερα, στις εφαρμογές της επιστήμης της Πληροφορικής, ένα πολύ διαδεδομένο σύστημα αρίθμησης είναι το δεκαεξαδικό.

Το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης έχει, όπως φαίνεται και από το όνομά του, δεκαέξι ψηφία. Τα ψηφία αυτά είναι τα γνωστά δέκα ψηφία του δεκαδικού συστήματος που συμπληρώνονται από τα πρώτα 6 κεφαλαία γράμματα του Αγγλικού αλφάβητου. Δηλαδή τα ψηφία του είναι τα εξής:

Ψηφίο	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Αξία	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

12. Να μετατρέψεις τον αριθμό $2AF5_{(16)}$ σε αριθμό του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

13. Να επιχειρήσεις να κάνεις την πρόσθεση $1BA02_{(16)}+8CB4_{(16)}$