

Κεφάλαιο 1: Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας και τόξου.

Ενότητα 5: Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων- Μέσο ευθύγραμμου τμήματος- Πρόσθεση, αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων – Πολυγωνικές γραμμές

Μέρος Α: Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων- Μέσο τμήματος

Δραστηριότητα 1

Να χρησιμοποιήσεις το μολύβι σου για να μετρήσεις το πλάτος του θρανίου σου ή του γραφείου σου. Αν χρησιμοποιήσεις ένα άλλο μολύβι θα βρεις το ίδιο αποτέλεσμα;

Δραστηριότητα 2



Οι αδελφοί Ντάλτον έθαψαν τη λεία της τελευταίας ληστείας τους κοντά σε ένα δέντρο. Στην εικόνα τους βλέπουμε να μετρούν την απόσταση από το σημείο που έθαψαν τη λεία μέχρι το συγκεκριμένο δέντρο, ώστε να μπορέσουν να την ξαναβρούν όποτε το θελήσουν. Το πρόβλημα, όμως, είναι ότι δεν μπορούν να συμφωνήσουν για την απόσταση: Ο Τζο επιμένει ότι είναι 60 βήματα, ο Τζακ ισχυρίζεται ότι είναι 48 βήματα, ο Ουίλιαμ είναι βέβαιος ότι είναι 40 βήματα και ο Άβερελ λέει ότι είναι 36 βήματα. Ακόμα, ο Άβερελ αναρωτιέται αν θα μπορούσαν να μετρήσουν αυτή την απόσταση σε δευτερόλεπτα με τη βοήθεια ενός ρολογιού, αλλά δεν το δοκιμάζει γιατί βιάζεται να τελειώσουν μια και, ως συνήθως, πεινάει. Ποιος από τους αδελφούς Ντάλτον μετράει σωστά την απόσταση που τους ενδιαφέρει; Τι γνώμη έχεις για τη μέθοδο του ρολογιού που «πέρασε» από το μυαλό του Άβερελ;

Δραστηριότητα 3

- Να χρησιμοποιήσεις μόνο το διαβήτη σου για να μετρήσεις το ευθύγραμμο τμήμα AB αν η μονάδα μέτρησης είναι το ευθύγραμμο τμήμα α .
- Να χρησιμοποιήσεις το υποδεκάμετρο για να μετρήσεις το ευθύγραμμο τμήμα AB .



Να θυμάμαι ότι:

Μέτρηση είναι η διαδικασία με την οποία αποφασίζουμε πόσες φορές χωράει η μονάδα μέτρησης στο μετρούμενο αντικείμενο.

Μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το αποτέλεσμα της μέτρησής του με κατάλληλη μονάδα μέτρησης.

Απόσταση δύο σημείων A και B ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία A και B .

Να προσέξω ότι:

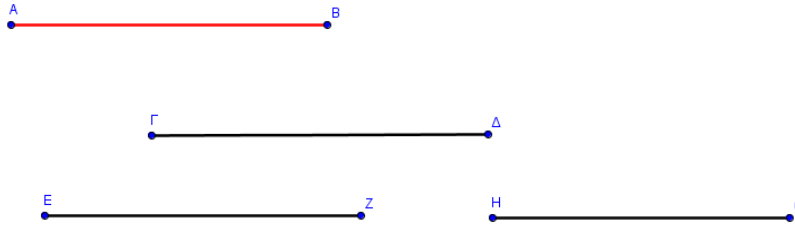
Η μονάδα μέτρησης και το αντικείμενο που μετράμε πρέπει να είναι ομοειδή αντικείμενα.



Το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης.

Δραστηριότητα 4

Να συγκρίνεις το ευθύγραμμο τμήμα AB της εικόνας με καθένα από τα υπόλοιπα ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιώντας μόνο τον διαβήτη σου. Μπορείς να κάνεις τη σύγκριση και με άλλον τρόπο;



Να θυμάμαι ότι:

Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο μήκος ή αν μπορώ να τα ταυτίσω με κατάλληλη μετατόπιση του ενός..



Παραδείγματα - Εφαρμογές

1. Με πόσους τρόπους μπορείς να συγκρίνεις δύο ευθύγραμμα τμήματα;

Απάντηση:

Με δύο τρόπους, με μέτρηση ή με τη βοήθεια του διαβήτη.

1^{ος} τρόπος: Με μέτρηση

Μετράμε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων και συγκρίνουμε τα μήκη.

1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
<p>$AB = 1,7 \text{ cm}$ $\Gamma\Delta = 2,4 \text{ cm}$</p>	<p>$AB = 1,7 \text{ cm}$ $\Gamma\Delta = 1,7 \text{ cm}$</p>	<p>$AB = 1,7 \text{ cm}$ $\Gamma\Delta = 1,4 \text{ cm}$</p>
$AB < \Gamma\Delta$	$AB = \Gamma\Delta$	$AB > \Gamma\Delta$

2^{ος} τρόπος: Με τον διαβήτη

1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
<p>Το Δ' βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ.</p>	<p>Το Δ' συμπίπτει με το Δ.</p>	<p>Το Δ' βρίσκεται στην προέκταση του ΓΔ προς το Δ.</p>
Τότε λέμε ότι το AB είναι μικρότερο από το ΓΔ και γράφουμε $AB < \Gamma\Delta$	Τότε λέμε ότι τα AB και ΓΔ έχουν το ίδιο μήκος και γράφουμε $AB = \Gamma\Delta$	Τότε λέμε ότι το AB είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ και γράφουμε $AB > \Gamma\Delta$

Ανοίγουμε το διαβήτη, ώστε η απόσταση των άκρων του να είναι ακριβώς όση η απόσταση των άκρων του ενός ευθύγραμμου τμήματος. Τοποθετούμε τη μύτη του διαβήτη στο ένα άκρο του άλλου ευθύγραμμου τμήματος και ελέγχουμε αν το άλλο άκρο του μπορεί να συμπίσει με το άλλο άκρο του ευθύγραμμου τμήματος.

2. Να σχεδιάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ που να είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που σου δίνεται.

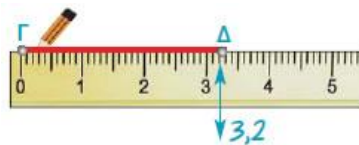
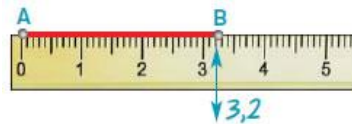
Απάντηση:

Μπορούμε να σχεδιάσουμε το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα με δύο τρόπους.

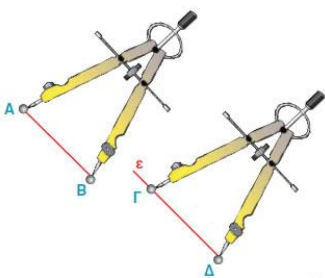
1^{ος} τρόπος: Με μέτρηση

Μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (στην περίπτωση του σχήματος $AB=3,2\text{cm}$).

Πάνω σε μία οποιαδήποτε ευθεία ϵ παίρνουμε ένα σημείο Γ και μετράμε ένα μήκος $\Gamma\Delta=3,2\text{cm}$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΑΒ.



2^{ος} τρόπος: Με τον διαβήτη



Ανοίγουμε το διαβήτη ώστε τα δύο άκρα του να ταυτίζονται με τα σημεία Α και Β.

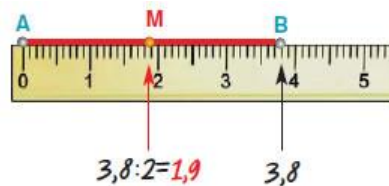
Πάνω σε μία οποιαδήποτε ευθεία ϵ παίρνουμε ένα σημείο Γ και στο σημείο της στο οποίο πέφτει το μολύβι του διαβήτη σημειώνουμε το σημείο Δ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΑΒ.

3. Να βρεθεί το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Απάντηση:

Μετρώ το ΑΒ και υπολογίζω πόσο είναι το μισό του μήκους του (στην εικόνα $AB=3,8\text{ cm}$, οπότε το μισό του είναι $1,9\text{ cm}$).

Χρησιμοποιώ το υποδεκάμετρο για να βρω ένα σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος για το οποίο ισχύει $AM=1,9\text{ cm}$ ή $BM=1,9\text{ cm}$. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ.



Να προσέξω ότι:

Η μέθοδος σχεδίασης του ευθύγραμμου τμήματος μόνο με κανόνα και διαβήτη λέγεται γεωμετρική κατασκευή.



Να θυμάμαι ότι:

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο Μ του τμήματος που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μέσο, που είναι μοναδικό.

Μέρος Β: Πρόσθεση, αφαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων – Πολυγωνικές γραμμές

Δραστηριότητα 5

Στην εικόνα βλέπεις ένα παίκτη του μπιλιάρδου που ετοιμάζεται να κτυπήσει τη μπάλα του. Στο επόμενο σκίτσο φαίνεται σε κάτοψη η πορεία της μπάλας από την αρχική θέση Μ στην τελική θέση Ε, αφού πρώτα κτύπησε την κόκκινη μπάλα Κ και, στη συνέχεια, στα τοιχώματα του τραπέζιου στα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πορεία της μπάλας είναι μία ευθεία γραμμή; Από ποια βασικά γεωμετρικά αντικείμενα συντίθεται; Μια γραμμή σαν αυτή της πορείας της μπάλας πάνω στο τραπέζι λέγεται **τεθλασμένη γραμμή**.

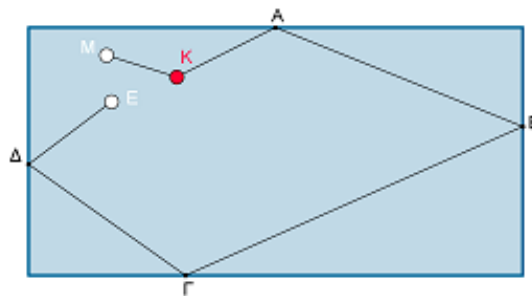


Να θυμάμαι ότι:

Τεθλασμένη γραμμή είναι μία γραμμή που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν βρίσκονται όλα πάνω στην ίδια ευθεία.



Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **διαδοχικά** όταν έχουν ένα κοινό άκρο και κανένα άλλο κοινό σημείο



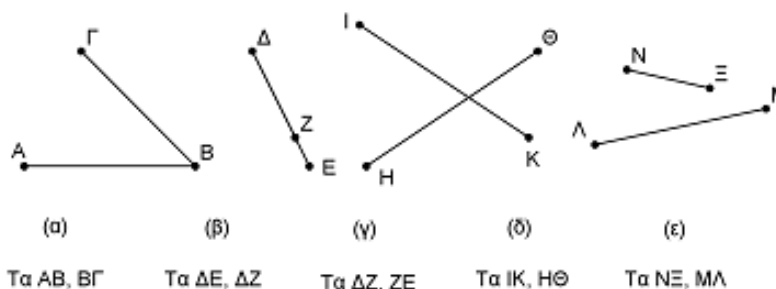
Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνθέτουν την τεθλασμένη γραμμή λέγονται **πλευρές** της γραμμής και τα άκρα τους **κορυφές** της γραμμής. Λέμε, επίσης, ότι οι πλευρές της γραμμής είναι **διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα**.

Μία τεθλασμένη γραμμή λέγεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις υπόλοιπες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Σε κάθε άλλη περίπτωση λέγεται **μη κυρτή**.

Μία τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα δύο άκρα συμπίπτουν λέγεται **ευθύγραμμο σχήμα**.

Δραστηριότητα 6

Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ευθύγραμμα τμήματα είναι διαδοχικά;



Να προσέξω ότι:

Για να προσθέσω δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετώ διαδοχικά πάνω σε μία ευθεία. Το άθροισμά τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου.

Το μήκος ενός αθροίσματος ευθύγραμμων τμημάτων ισούται με το άθροισμα των μηκών τους

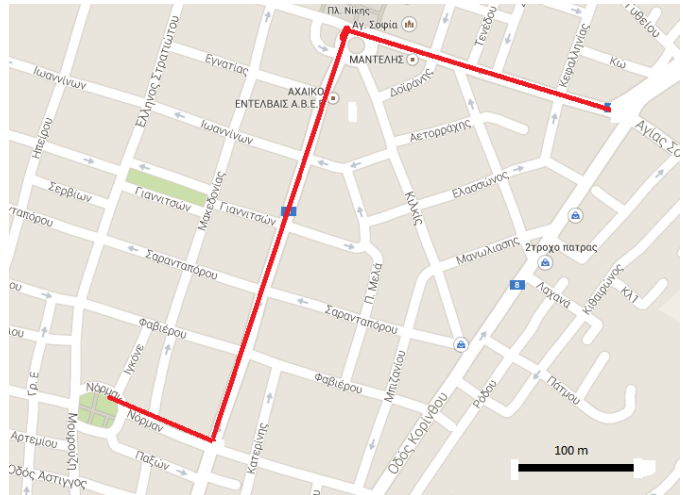
Μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής είναι το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων από τα οποία αποτελείται.

Περίμετρος ενός σχήματος είναι το άθροισμα των πλευρών του.



Δραστηριότητα 7

Ο Μιχάλης, που είναι φοιτητής στην Πάτρα, ξεκίνησε από το σπίτι του συμφοιτητή του Γιώργου να πάει στο δικό του ακολουθώντας τη διαδρομή που βλέπεις στον χάρτη. Στο υπόμνημα του χάρτη μπορείς να δεις την απόσταση που αντιστοιχεί σε 100 μέτρα.



- A. Να υπολογίσεις, με προσέγγιση δεκάδων μέτρων, το μήκος κάθε ενός από τα τρία μέρη της διαδρομής;
- B. Χρησιμοποίησε την παρακάτω ημιευθεία για να βάλεις στη σειρά τα τρία κομμάτια της διαδρομής.

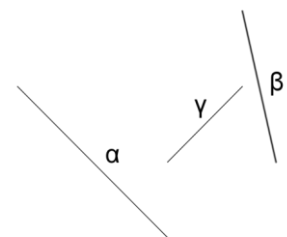


Γ. Μπορείς, τώρα, να υπολογίσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια το μήκος της διαδρομής;

Δραστηριότητα 8

Στην εικόνα βλέπεις τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα α, β και γ.

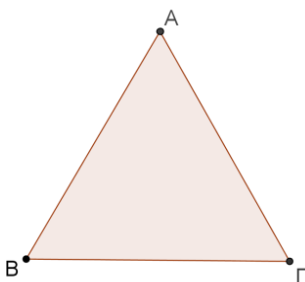
Προσπάθησε να βρεις το άθροισμά τους.



Δραστηριότητα 9

Στο παρακάτω σχήμα βλέπεις ένα τρίγωνο ΑΒΓ με όλες τις πλευρές του ίσες.

Κατασκεύασε την ημιευθεία ΒΓ και βρες πάνω σε αυτήν ένα σημείο Ε, ώστε το ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.



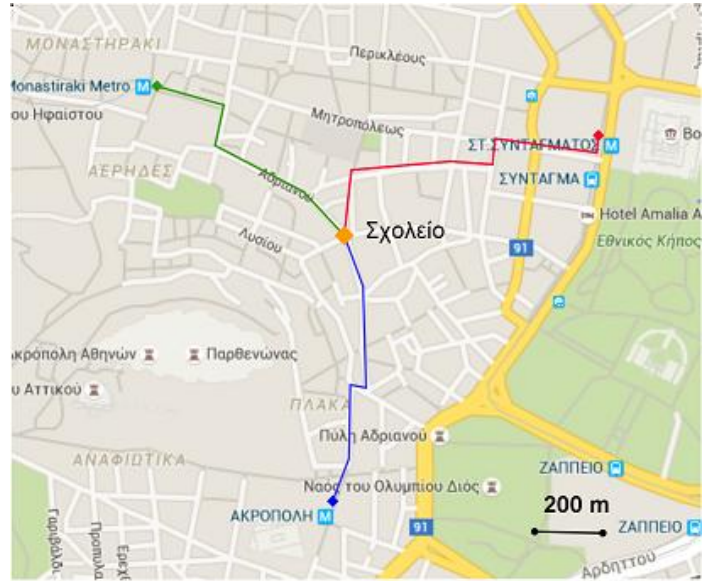
Δραστηριότητα 10**Να προσέξω ότι:**

Για να αφαιρέσω δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετώ στην ίδια ημιευθεία με το ένα άκρο τους να ταυτίζεται με την αρχή της. Η διαφορά τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα άλλα άκρα των δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

Το μήκος της διαφοράς δύο ευθύγραμμων τμημάτων ισούται με τη διαφορά των μηκών τους.



Στον χάρτη φαίνονται οι διαδρομές που ακολούθησαν τρεις μαθητές για να φτάσουν στο σχολείο μας από τους σταθμούς του μετρό στο Σύνταγμα, στο Μοναστηράκι και την Ακρόπολη.



Α. Να βρεις ποια από τις διαδρομές είναι η μικρότερη

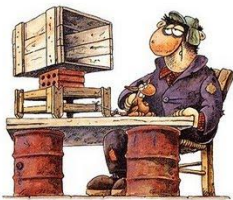
χωρίς να κάνεις μετρήσεις.

Β. Μπορείς να βρεις πόσο διαφέρουν οι διαδρομές από το Σύνταγμα και το Μοναστηράκι;

Γ. Ποιο είναι το μήκος κάθε διαδρομής;

Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις ημιευθείες Σχ, Μγ και Αζ για να απαντήσεις στα ερωτήματα.

Σ	x
Μ	y
Α	z

**Αξιοποιώντας την τεχνολογία**

Να ανοίξεις ένα αρχείο του λογισμικού Geogebra, να αποκρύψεις τους άξονες και να το σώσεις με το όνομα *Άθροισμα*.

Να χρησιμοποιήσεις το λογισμικό για να κάνεις τις παρακάτω κατασκευές.

- ✓ Να κατασκευάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ (Προσοχή: Πρέπει να μετονομάσεις το σημείο Β σε Γ).
- ✓ Να πάρεις ένα σημείο Β πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.
- ✓ Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μέτρησης για να μετρήσεις τα ευθύγραμμο τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.

- ✓ Να μετακινήσεις το σημείο Β πάνω στο ΑΓ και να πάρεις τις νέες μετρήσεις για κάθε μία από τις θέσεις του. Να καταγράψεις τις μετρήσεις σου στον διπλανό πίνακα:

ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ+ΒΓ

- ✓ Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μήκη ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ;
- ✓ Να βρεις τη θέση του σημείου Β για την οποία είναι $ΑΒ=ΒΓ$. Ποιο είναι τότε το σημείο Β;

- ✓ Να κατασκευάσεις την ημιευθεία ΑΓ και να πάρεις ένα σημείο της Δ που δεν περιέχεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Να μετρήσεις τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΑ, ΑΓ και ΓΔ. Να μετακινήσεις το σημείο Δ πάνω στην ημιευθεία ΑΓ, φροντίζοντας να παραμένει έξω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Να καταγράψεις τις μετρήσεις σου στον πίνακα.

ΑΔ	ΑΓ	ΓΔ	ΑΔ-ΑΓ

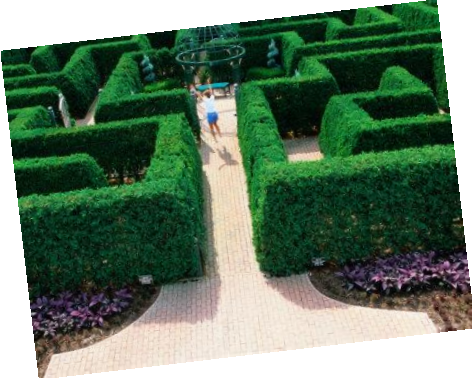
- ✓ Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μήκη ΑΓ, ΑΔ και ΓΔ;
- ✓ Μπορείς να κάνεις το ίδιο και για ένα σημείο Ε που να ανήκει στην αντικείμενη ημιευθεία της ΑΓ;

Μπορώ να εφαρμόσω όσα έμαθα;

1. Το σημείο Α απέχει 10cm από το σημείο Β. Σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις να τοποθετήσεις το σημείο Γ στην κατάλληλη θέση έτσι, ώστε να ισχύουν τα πιο κάτω και στη συνέχεια να υπολογίσεις, κάθε φορά, το μήκος ΓΑ.
 - (α) Το Γ είναι μέσο του ΑΒ.
 - (β) Το Α είναι μέσο του ΒΓ.
 - (γ) Το Β είναι μέσο του ΑΓ.
 - (δ) Το Δ είναι μέσο του ΑΒ και το Γ μέσο του ΔΒ.
2. Πάρε ένα σημείο Α. Να βρεις τρία σημεία που το καθένα να απέχει 2,7 cm από το Α.
3. Το μέσο Ο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχει 4,2 cm από το άκρο Α. Πόσο είναι το μήκος του ΑΒ;
4. Σε μία ευθεία ε, πάρε στη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: $ΑΒ = 2,5 \text{ cm}$, $ΒΓ = 3 \text{ cm}$ και $ΓΔ = 2,5 \text{ cm}$. Εξέτασε αν τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα.
5. Να χρησιμοποιήσεις το λογισμικό Geogebra για να κάνεις την πιο κάτω κατασκευή.
 - (α) Να κατασκευάσεις τρία σημεία Α, Β, Γ στο επίπεδο τέτοια, ώστε να μη βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
 - (β) Να κατασκευάσεις τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ.
 - (γ) Να κατασκευάσεις το μέσο Μ του ΑΒ.
 - (δ) Να κατασκευάσεις το μέσο Ν του ΑΓ.

- (ε) Να υπολογίσεις το μήκος των ΒΓ και ΜΝ.
 (στ) Να μετακινήσεις το σημείο Β.
 (ζ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μήκη ΒΓ και ΜΝ;

Ώρα για λίγο παιχνίδι



Δύο ομάδες συμμαθητών σου που συμμετέχουν σε μία εκδρομή σκοπεύουν μπουν σε έναν λαβύρινθο σαν αυτόν που μπορείς να δεις στη φωτογραφία. Κάθε μία από τις δύο ομάδες θα μπει στο λαβύρινθο από μία από τις δύο εισόδους που υπάρχουν.

Στην εικόνα δεξιά μπορείς να δεις την κάτοψη του λαβύρινθου.

Α. Να χρησιμοποιήσεις το μολύβι σου και έναν χάρακα για να χαράξεις την τεθλασμένη γραμμή που πρέπει να είναι η διαδρομή των δύο

ομάδων για να μπορέσουν να βγουν από τον λαβύρινθο.

Β. Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής αν το πλάτος του κήπου είναι 15 μέτρα;

Γ. Μπορείς να βρεις σε ποιο σημείο βρίσκεται το μέσο της διαδρομής;

